人工環境設計解析工学
構造力学と有限要素法
（第2回）

東京大学

新領域創成科学研究科

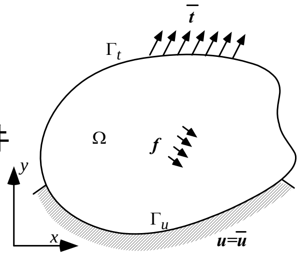
鈴木克幸

固体力学の基礎方程式

- 変位-ひずみの関係
  - 適合条件式
- ひずみ-応力の関係
  - 構成方程式
- 応力-外力の関係
  - 平衡方程式
- 境界条件
  - 変位規定境界
  - 反力規定境界

場の方程式

境界条件



荷重 ⇄ 応力 ⇄ ひずみ ⇄ 変形

平衡方程式　構成方程式　適合条件式

構造力学の基礎式

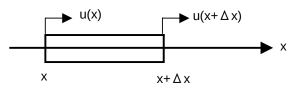
荷重 ⇄ **応力** ⇄ **ひずみ** ⇄ **変形**

平衡方程式　**構成方程式**　**適合条件式**

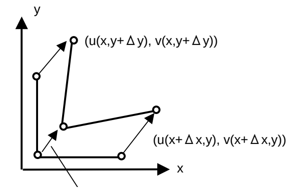
ひずみ

- 一軸
  - なぜ変位でなくひずみか

$$\varepsilon = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{u(x)+\dfrac{du}{dx}\Delta x - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$



- 多軸
  - のびひずみ
  - 剪断ひずみ

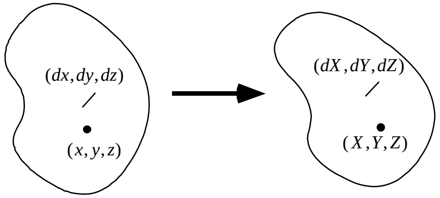


変位

- 変形前、変形後の座標

$$\begin{cases} u = X - x \\ v = Y - y \\ w = Z - z \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i dx_i \qquad dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX_i dX_i$$



変位とひずみ

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)dz = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

$$dS^2 - ds^2 = \left\{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dx^2$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dy^2$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dz^2$$

変位とひずみ2

$$= \left\{2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dx^2$$
$$+\left\{2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dy^2$$
$$+\left\{2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}dz^2$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dxdy$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}dydz$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}dzdx$$

ひずみ（Greenのひずみ）

直ひずみ

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

剪断ひずみ

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

テンソル表記 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right]$

線形ひずみ

- 2次の項を無視

直ひずみ

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$$

剪断ひずみ

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

テンソル表記

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

変位-ひずみの関係（2次元、線形）

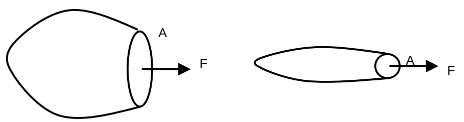
- 変位 $\{u_x, u_y\}$
- ひずみ $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$
- 変位が十分小さいとき、線形の関係

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u_x/\partial x\\ \partial u_y/\partial y\\ \partial u_x/\partial y+\partial u_y/\partial x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\end{Bmatrix}$$

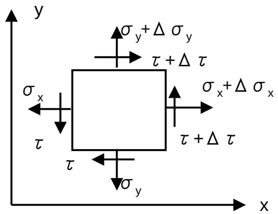
ベクトル表示 $\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla^{*}\boldsymbol{u}$

応力

- 一軸
  - なぜ力でなく応力か



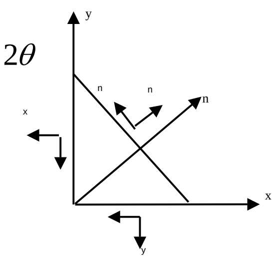
- 多軸
  - 2次元、3次元



任意方向の応力

$$\begin{cases}\tau\sin\theta+\sigma_x\cos\theta+\tau_n\sin\theta=\sigma_n\cos\theta\\ \tau\cos\theta+\sigma_y\sin\theta-\tau_n\cos\theta=\sigma_n\sin\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_n=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau\sin 2\theta\\ \tau_n=-\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau\cos 2\theta\end{cases}$$

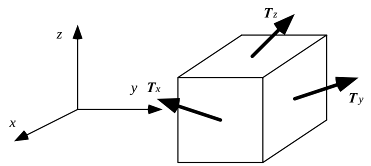


- 主応力方向
  - 剪断応力ゼロ
  - 直応力最大

$$0=\frac{\partial\sigma_n}{\partial\theta}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau\cos 2\theta=\tau_n$$

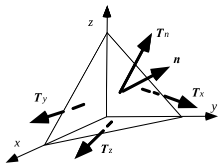
3次元応力

$$T_x = \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\}$$
$$T_y = \{\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}\}$$
$$T_z = \{\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}\}$$



$$T_{nx} dS = \sigma_{xx} n_x dS + \sigma_{yx} n_y dS + \sigma_{zx} n_z dS$$
$$T_{ny} dS = \sigma_{xy} n_x dS + \sigma_{yy} n_y dS + \sigma_{zy} n_z dS$$
$$T_{nz} dS = \sigma_{xz} n_x dS + \sigma_{yz} n_y dS + \sigma_{zz} n_z dS$$

$$\mathbf{T}_n = \begin{Bmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$



テンソル表記

$$T_{ni} = \sigma_{ji} n_j$$

3次元主応力

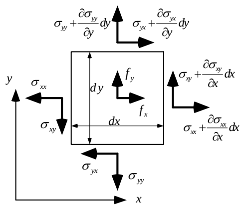
- 剪断応力なし
  - 面の法線方向に力がかかる

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

- 固有値問題
  - 固有値（3成分）＝主応力値
  - 固有ベクトル（互いに直交）＝主応力方向

応力と外力の釣り合い

- 微小領域における釣り合い



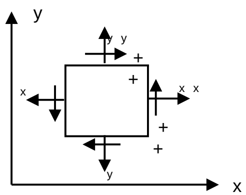
$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla^{*T} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

力の釣り合い

- 2次元

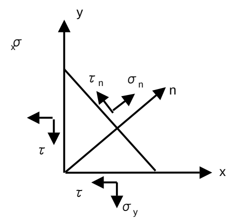
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$



- 任意の面の応力

$$\tau \sin\theta + \sigma_x \cos\theta + \tau_n \sin\theta = \sigma_n \cos\theta$$
$$\tau \cos\theta + \sigma_y \sin\theta - \tau_n \cos\theta = \sigma_n \sin\theta$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta$$
$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$



境界条件

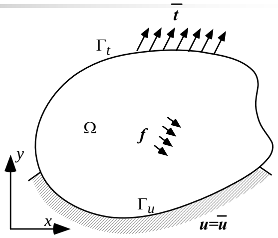
- 変位の境界条件

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}$$

- 荷重の境界条件

$$N_x \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{t}}$$

$$N_x = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$



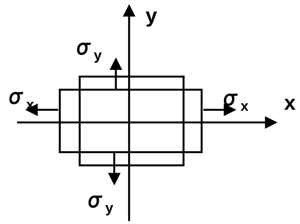
応力と歪みの関係

- 一軸

フックの法則（線形）

$$\sigma = E\varepsilon$$

- 多軸



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

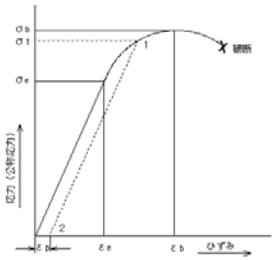
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \tau = G\gamma$$

E :ヤング率
ν:ポアソン比
G:剪断剛性

ひずみ-応力関係式

- Hookeの法則

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

等方弾性
（平面応力問題 ）

E :ヤング率
ν :ポアソン比

$$\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon}$$

3次元の線形弾性関係

- 異方性

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

- 直交異方性（性質がxy面、yz面、xz面に対して対称）

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

等方性(3次元)

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}$$

- λ , μ :ラーメの定数

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

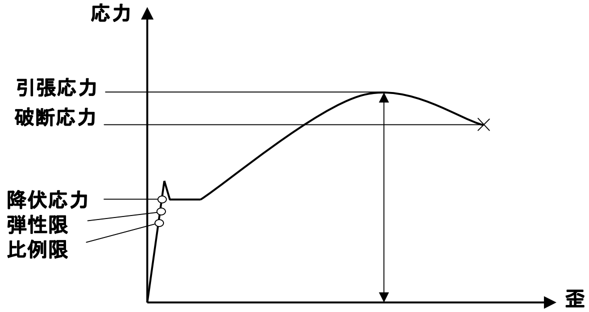
$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}$$

- テンソル表記

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\sigma_{ij}-\nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right\}$$

一般の鋼材



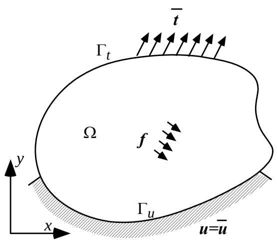
アルミ材などでは、降伏点が 明確に現れない
0.2%耐力

基礎方程式

$$\nabla^{*T}(D\nabla^{*}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\quad on\quad \Gamma_u$$

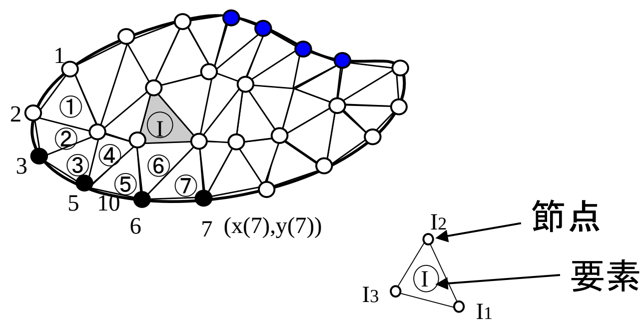
$$N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{t}}\quad on\quad \Gamma_t$$



偏微分方程式の境界値問題
変位表記
　状態変数　変位
　自己随伴
解析解を求めるのは困難
　　→数値解

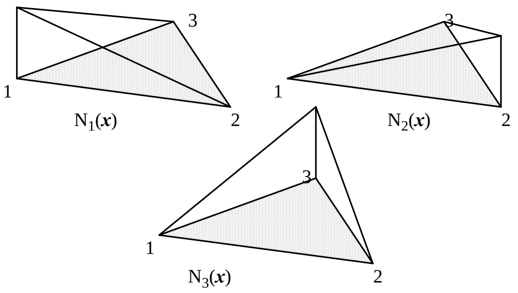
有限要素離散

- 領域を、単位領域(要素)に分割

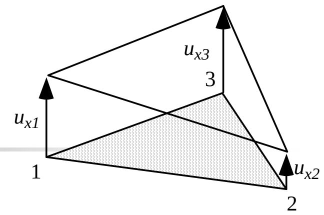


形状関数

- 要素内のある節点で1となり、他の節点で0となる関数
- 三角形要素では1次関数



変位の近似



- 形状関数と節点での値

$$\tilde{u}_x(x,y) = u_{x1}N_1(x,y) + u_{x2}N_2(x,y) + u_{x3}N_3(x,y)$$

$$\tilde{u}_y(x,y) = u_{y1}N_1(x,y) + u_{y2}N_2(x,y) + u_{y3}N_3(x,y)$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{xi} \\ \tilde{u}_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i = N\boldsymbol{u}_i$$

ひずみ、応力の近似

- 変位を微分
- 三角形要素では要素内で一定値

$$\tilde{\varepsilon}_i = \nabla^* \boldsymbol{u}_i = \nabla^* N \boldsymbol{u}_i \equiv B\boldsymbol{u}_i$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = D\boldsymbol{\varepsilon}_i = DB\boldsymbol{u}_i$$

弱形式とエネルギー原理

- 変分原理

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T \left(\nabla^{*T}\left(D\nabla^*\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{f}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \left(\left(N_x D\nabla^*\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{t}}\right)\right) d\Gamma = 0$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

⇓

$$\int_\Omega \left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^*\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{u}^T f\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

仮想仕事の原理
　仮想変位による内部エネルギーの増加分＝外力の仕事

$$\int_\Omega \left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^*\boldsymbol{u} d\Omega = \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma$$

なぜ弱形式か

- 1次関数で近似するとひずみは要素間で不連続
- 2階微分は存在しない

$$\int_{\Omega} \left(\left(\nabla^* \delta \boldsymbol{u}\right)^T D \nabla^* \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{u}^T f \right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$

要素ごとの積分

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\left(\nabla^* \delta \boldsymbol{u}\right)^T D \nabla^* \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} \right) d\Omega - \sum_i \int_{\Gamma_{ti}} \delta \boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$

有限要素離散の弱形式

- 変位 $\boldsymbol{u} = N \boldsymbol{u}_i$
- ひずみ $\varepsilon = B \boldsymbol{u}_i$
- 仮想変位 $\delta \boldsymbol{u} = N \delta \boldsymbol{u}_i$
- 仮想ひずみ $\delta \varepsilon = B \delta \boldsymbol{u}_i$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\left(B \delta \boldsymbol{u}_i\right)^T D B \boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} \left(N \delta \boldsymbol{u}_i\right)^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \left(N \delta \boldsymbol{u}_i\right)^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\delta \boldsymbol{u}_i^T B^T D B \boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} \delta \boldsymbol{u}_i^T N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \delta \boldsymbol{u}_i^T N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

要素剛性マトリクスと全体剛性マトリクス

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\delta \boldsymbol{u}_i^T B^T D B \boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} \delta \boldsymbol{u}_i^T N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \delta \boldsymbol{u}_i^T N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

$$\delta \boldsymbol{u}^T K \boldsymbol{u} = \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}$$

全体剛性マトリクス $K = \sum_i \int_{\Omega_i} \left(B^T D B \right) d\Omega$ 要素剛性マトリクス

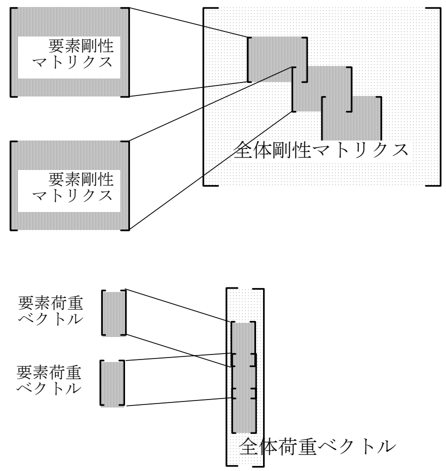
全体荷重ベクトル $\boldsymbol{f} = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$ 要素荷重ベクトル

$$K \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

有限要素法の剛性方程式
→線形連立方程式ソルバー

剛性マトリクス、荷重ベクトルの足し合わせ

- 全体自由度の中の相当する位置に足し込む



動的解析

- 過渡応答解析
  - 線形
  - 非線形
- 固有振動解析
  - 線形

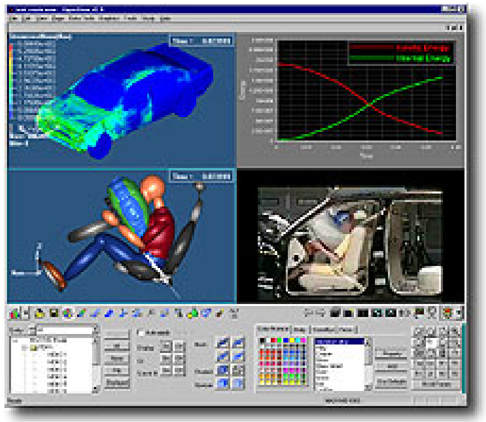
- 静的問題では力が釣り合う

  $\Sigma F=0$
- 動的問題では不釣り合い力が加速度を生じる

  $\Sigma F=ma$

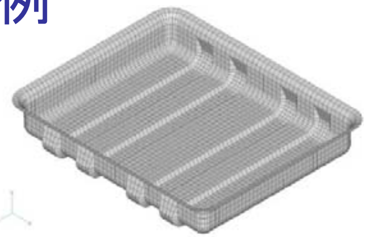
過渡応答解析の例

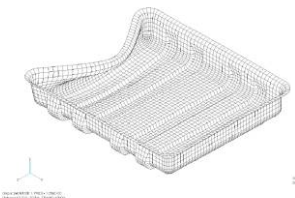
- 時間を追って解析



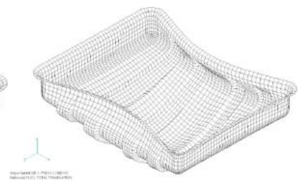
固有振動解析の例

- 自動車ガスタンク

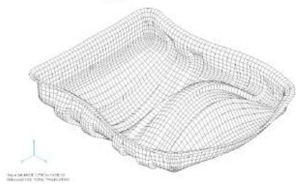




1次 129.6 Hz



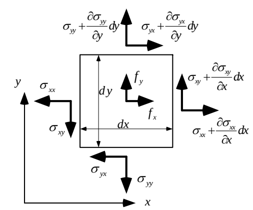
2次 374.8 Hz



3次 547.9 Hz

平衡方程式

- 微小領域における釣り合い



$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \ddot{u}_x \\ \rho \ddot{u}_y \end{Bmatrix}$$

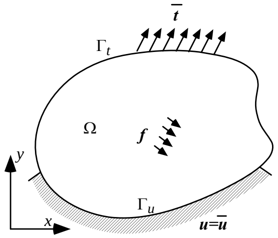
$$\nabla^{*T}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$$

基礎方程式

$$\nabla^{*T}(D\nabla^{*}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

$$N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{t}} \quad on \quad \Gamma_t$$



偏微分方程式の境界値問題
変位表記
　状態変数　変位
　外力、境界条件は時間の
関数であり得る
材料定数は？

弱形式

$$\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\left(\nabla^{*T}\left(D\nabla^{*}\boldsymbol{u}\right)+\boldsymbol{f}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\left(\left(N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{t}}\right)\right)d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\left(\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\right)d\Omega \qquad \boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

↓

$$\int_{\Omega}\left(\left(\nabla^{*}\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^{*}\boldsymbol{u}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\left(\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\right)d\Omega$$

$$=\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f}\,d\Omega+\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}\,d\Gamma \qquad \boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

有限要素離散の弱形式

- 変位　$\boldsymbol{u}=N\boldsymbol{u}_i$
- 仮想変位　$\delta\boldsymbol{u}=N\delta\boldsymbol{u}_i$
- 加速度　$\ddot{\boldsymbol{u}}=N\ddot{\boldsymbol{u}}_i$

$$\sum_i\int_{\Omega_i}\left(\left(B\delta\boldsymbol{u}_i\right)^T DB\boldsymbol{u}_i\right)d\Omega=\delta\boldsymbol{u}^T K\boldsymbol{u}$$

$$\sum_i\left[\int_{\Omega_i}\left(N\delta\boldsymbol{u}_i\right)^T\boldsymbol{f}d\Omega+\int_{\Gamma_{ti}}\left(N\delta\boldsymbol{u}_i\right)^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma\right]=\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{f}}$$

$$\sum_i\int_{\Omega_i}\left(\delta\boldsymbol{u}_i^T N^T\rho N\ddot{\boldsymbol{u}}_i\right)d\Omega=\sum_i\delta\boldsymbol{u}_i^T\int_{\Omega_i}\left(N^T\rho N\right)d\Omega\,\ddot{\boldsymbol{u}}_i$$

$$=\sum_i\delta\boldsymbol{u}_i^T M_i\,\ddot{\boldsymbol{u}}_i=\delta\boldsymbol{u}^T M\,\ddot{\boldsymbol{u}}$$

M: 質量マトリクス

基礎方程式

- 減衰なし

$$K\boldsymbol{u}+M\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{f}$$

- 減衰を考慮

$$K\boldsymbol{u}+C\dot{\boldsymbol{u}}+M\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{f}$$

- 固有振動解析

$$K\boldsymbol{u}=\omega^2 M\boldsymbol{u}$$

減衰

- 現実の振動は必ず減衰
- 理論的に評価は困難
- 実験、経験により評価
  - 構造減衰
  - 質量減衰

$$C = \alpha K + \beta M$$

固有振動問題

- モード解析、モーダル解析

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\sin(\omega t)$$

$$K\boldsymbol{a} = \omega^2 M\boldsymbol{a}$$

ω　固有振動数
$\boldsymbol{a}$　固有振動モード

固有値問題

- 通常の固有値問題

$$K\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

- 一般化固有値問題

$$K\boldsymbol{u} = \lambda M\boldsymbol{u}$$

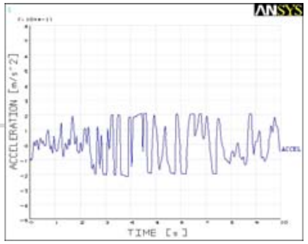
- Mが正値対称であれば

$$M = LL^T$$
$$L^{-1}K\boldsymbol{u} = \lambda L^T\boldsymbol{u}$$
$$L^{-1}KL^{-T}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

特徴

- KとMは正値対称
- 固有振動数は実数
- 固有モードは互いに直交

過渡応答解析



- 時間積分
- 陰解法
  - 比較的ゆっくりとした非線形現象をきちんと解く
  - 動的問題、準静的問題
  - ABAQUS, MARCなど
- 陽解法
  - 運動方程式の時間積分において連立方程式を解くことなく解を得る
  - 強度の大変形を伴う衝撃問題
  - 非常に小さな時間刻みにする必要性
  - LS-DYNA、PAM-CRASHなど

時間積分（中央差分法）

$$K\boldsymbol{u} + C\dot{\boldsymbol{u}} + M\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_n \approx \frac{\boldsymbol{u}_{n+1} - \boldsymbol{u}_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_n \approx \frac{\boldsymbol{u}_{n+1} - 2\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n-1}}{\Delta t^2}$$

⇩

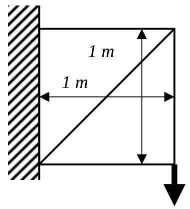
$$\left(\frac{1}{2\Delta t}C + \frac{1}{\Delta t^2}M\right)\boldsymbol{u}_{n+1} = \left(\frac{2}{\Delta t^2}M - K\right)\boldsymbol{u}_n - \left(\frac{1}{2\Delta t}C - \frac{1}{\Delta t^2}M\right)\boldsymbol{u}_{n-1} + \boldsymbol{f}$$

時間積分法

- 陽解法
  - 中央差分法
- 陰解法
  - Wilsonの θ 法
  - Newmarkの β 法

課題

- 以下の問題を有限要素法を用いて解く. 要素剛性マトリクス, 全体剛性マトリクスを求めよ。
- 質量マトリクスをもとめよ
  - ただし、三角形内の積分は三角形の重心での値に三角形の面積をかけたもので近似できるとしてもよい
- Matlab、Octave等を用い、固有振動数、固有モードを求めよ
- 固有モードが直交することを確認せよ



E=100 GPa
ν=0

F=1 N