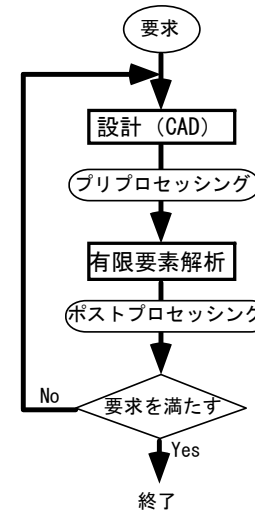


# 人工環境設計解析工学 メッシュ生成 (第3回)

東京大学  
新領域創成科学研究科  
鈴木克幸

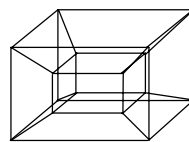
# プリ・ポストプロセッシング



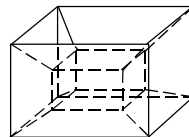
- プリプロセス
  - 形状の定義
    - CADから直接が理想、しかし現実には別に作成することが多い
  - 解析条件(荷重、支持条件)の定義
  - メッシュ生成
- ポストプロセス
  - 解析結果の可視化
  - 解析結果に基づく設計変更

# 3次元形状モデリング

- 形状の表現方法
  - ワイヤフレームモデル(点と線)
  - サーフェースモデル(点と線と面)
  - ソリッドモデル(点と線と面とソリッド)
    - CSGモデル
    - B-repモデル
    - デコンポジションモデル



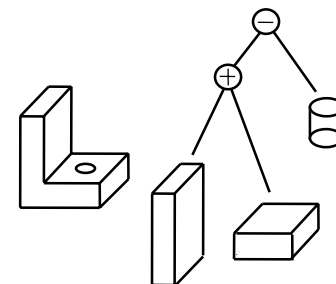
ワイヤフレームモデル



サーフェースモデル  
ソリッドモデル

# CSG Model (Constructive Solid Geometry)

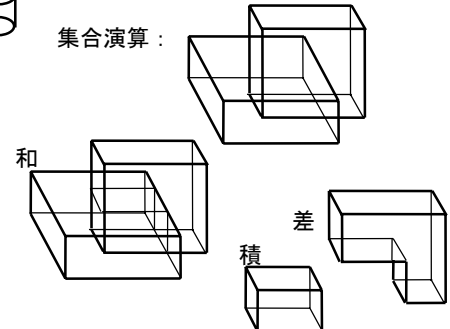
1973 TIPS (Okino)



基本立体(プリミティブ)の集合演算により立体を表現する。

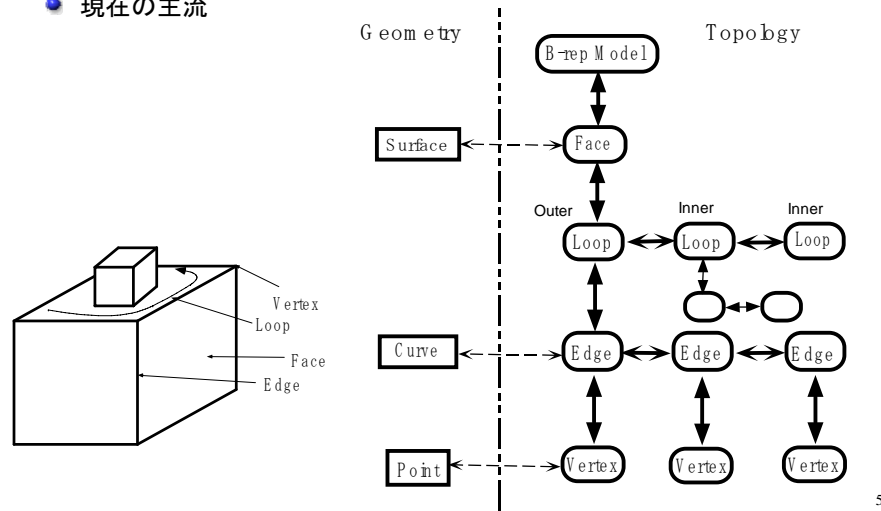
プリミティブ:  
直方体、球、円柱、円錐、自由曲面体

集合演算:



# B-repモデル

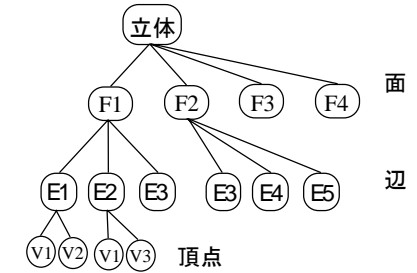
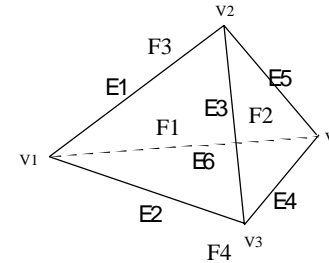
- 現在の主流



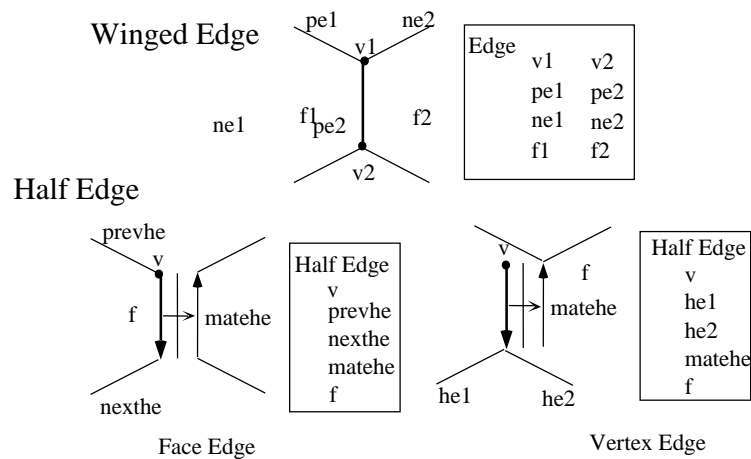
# B-Rep Model の位相情報

1973 BUILD (Braid et. al.)

F1	E1	E2	E3
F2	E3	E4	E5
F3	E2	E4	E6
F4	E1	E5	E6

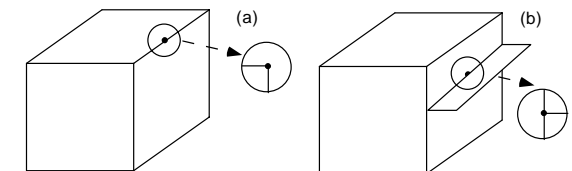


# いろいろなB-Rep Model

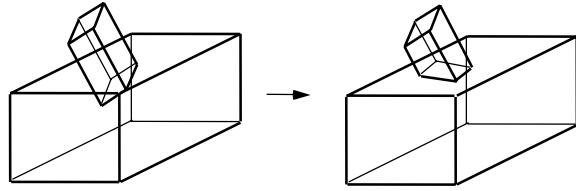


# 多様体と非多様体

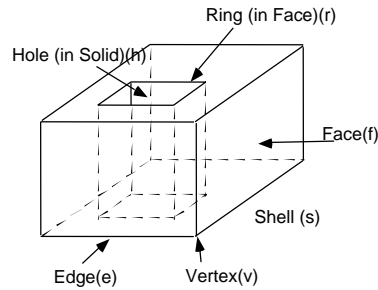
- オイラーの式
  - $v-e+f-r=2(s-h)$ 
    - v: 頂点の数 e: 辺の数 f: 面の数 r: 面内の穴の数 h: 立体を貫通する穴の数 s: 殻の数
  - 二多様体B-repモデル→非常に簡単なデータ構造
- 解析におけるモデリング
  - 非多様体モデリングの必要性



# オイラー操作

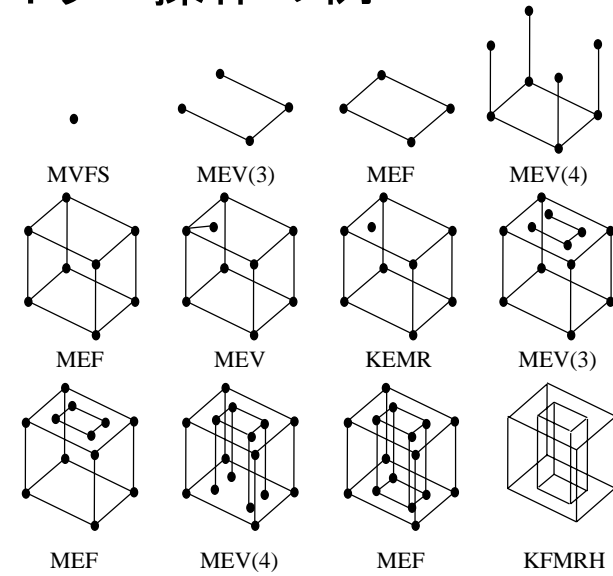


オイラーの公式:  $v - e + f - r = 2(s - h)$  Euler Operations



	v	e	f	h	r	s
MVFS	+1	0	+1	0	0	+1
KVFS	-1	0	-1	0	0	-1
MEV	+1	+1	0	0	0	0
KEV	-1	-1	0	0	0	0
MEF	0	+1	+1	0	0	0
KEF	0	-1	-1	0	0	0
KEMR	0	-1	0	0	+1	0
MEKR	0	+1	0	0	-1	0
KFMRH	0	0	-1	+1	+1	0
MFKRH	0	0	+1	-1	-1	0

# オイラー操作の例



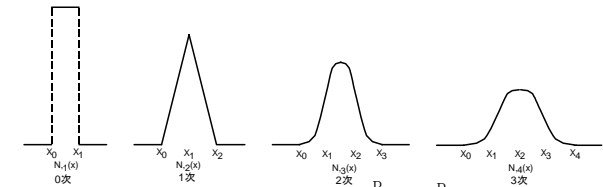
# ソリッドの幾何情報

- 位相情報
  - B-rep
- 幾何情報
  - B-スプライン曲線
  - 有理B-スプライン曲線
  - NURBS

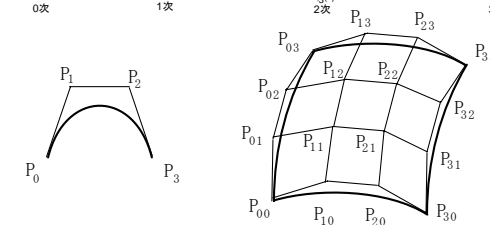
# B-Spline曲線(曲面)

$$P(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)P_i$$

基底関数



制御点



# 有理B-Spline曲線(曲面)

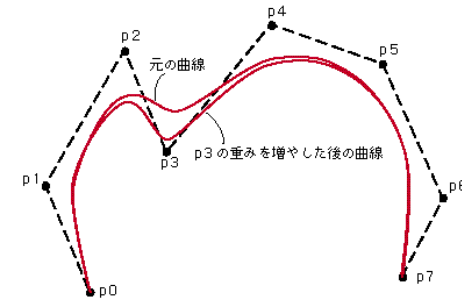
- 制御点に重み
  - 円弧などを厳密に表現可能

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t)w_i}$$

- NURBS: 非一様な有理B-Spline関数

# NURBS

- ウェイトが大きい制御点には曲線、曲面が近づき、小さい制御点からは遠ざかる。
- IGES (Initial Graphics Data Exchange Specification) 他、多くのCADシステムで利用



# 形状の数学的表現(曲面)

## パラメトリック曲面

座標値  $x, y, z$  が、パラメータ  $u, v$  によって表される。

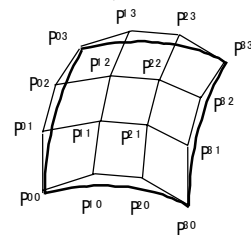
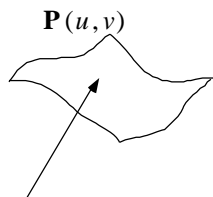
$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

位置ベクトル

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

## Bスプライン曲面

- 曲面の次数を自由に選べる
- 曲面の一部を局所的に変更可能

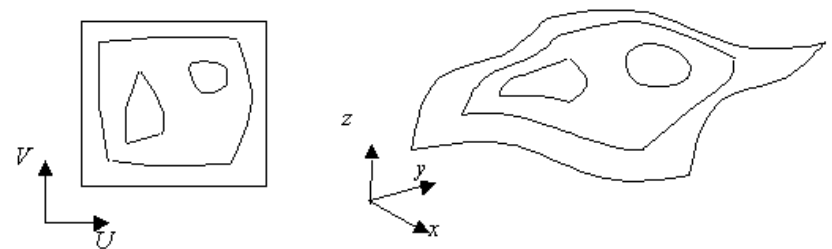


## 有理B-スプライン曲面、NURBS

$$P(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u)M_{j,l}(v)w_{ij}P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u)M_{j,l}(v)w_{ij}}$$

# トリム曲面

- スプライン曲面は四辺形
- 任意の形状の面の作成



## CADとプリプロセッサ

- ダイレクトトランスレータによるもの
  - 大手CAD製品、汎用ソリッドカーネル(Parasolid, ACIS, DesignBase)
- 中間ファイルによるもの
  - IGES、DXF、STEP

17

## ソリッドカーネル

- ソリッドの形状情報の管理、編集、表示等
  - 主にミッドレンジCAD、プリポストなどで利用
  - Parasolid
  - ACIS
  - DesignBase
  - Lattice Kernel
- 同じカーネルを使ったもの同士であれば、カーネルを読み込める...

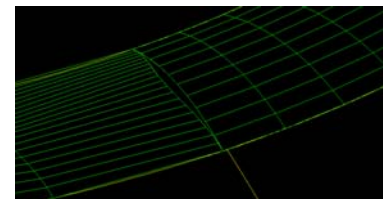
## 形状データの交換

- IGES ANSI 14.26M 1980～
  - あいまいさ:解釈の違いによる問題
  - 応用分野の拡大により、規格が巨大化
- DXF
  - AutoCAD(AutoDesk社)のフォーマット
  - アメリカにおける業界標準
- STEP
  - ISO 10303 次世代標準
  - 曖昧さのない表現(EXPRESS言語の利用)
  - 設計, 試作・テスト, 生産, サポートに至る1つの製品のライフサイクルを表現

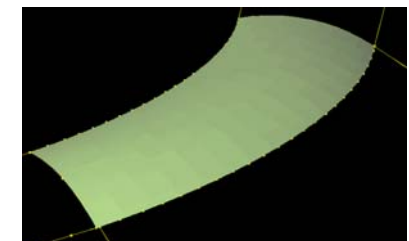
19

## CADの問題点

- おなじ形状であってもいろいろな表現方法がある
- 数値精度の問題



隙間の発生



細かいうねりの発生

20

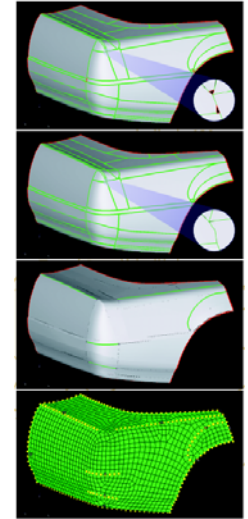
## なぜCADからモデルを持ってこられないか

- 不完全なCADデータ
  - 閉じていない面 (非多様体)
  - 精度の問題
  - 微少なサーフェース領域
- B-repモデルのIGES (400番) はほとんどCADで使われていない
  - サーフェース情報のみ。位相情報なし

21

## プリプロセッサ側での対応

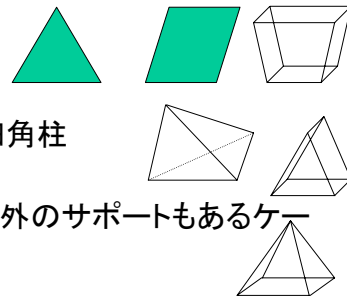
- 形状のクリーンアップ
  - 細かいフィーチャの除去
  - 不整合の修正
    - 点の移動
    - エッジの一体化
  - 面の一体化



22

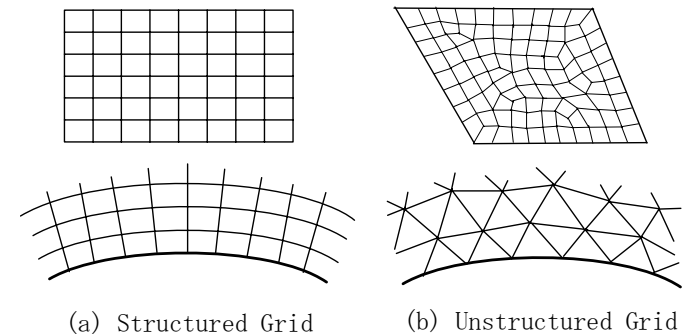
## 有限要素法のメッシュ

- 2次元
  - 三角形、四辺形
  - 1次要素、高次要素
- 3次元
  - 四面体、六面体、三角柱、四角柱
- プログラムによってはこれ以外のサポートもあるケースがある。



23

## 構造格子と非構造格子



マッピング法  
バウンダリフィット法等

デラウニー法  
アドバンシングフロント法等

24

## メッシュ生成

- 構造メッシュ ～マップドメッシュ
  - 単純形状へのマッピング
- 非構造メッシュ ～フリーメッシュ
  - サーフェスはほぼOK(四辺形、三角形)
  - 4面体もほぼOK
  - 任意形状を完全に6面体に切るのは現状では難しい

25

## 自動メッシュ生成技術

- 構造メッシュ生成(規則的に配置されたメッシュ)
  - マッピング法(マップドメッシュ)
  - バウンダリフィット法
- 非構造メッシュ生成
  - デラウニー法
  - 四分木、八分木法
  - フロント法
  - ペービング法
- 構造問題では非構造メッシュが主流。流体問題では構造メッシュが主流だが、非構造メッシュに移りつつある。

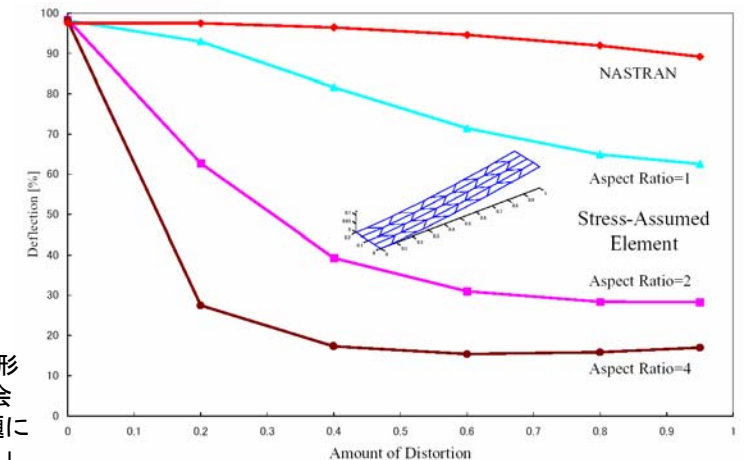
26

## よいメッシュとは

- 精度よく解析できるメッシュ
  - 細かいメッシュ
  - ゆがみのないメッシュ
  - 力学的に妥当なメッシュ
- メッシュのゆがみは解析において致命傷
  - だれでも解析をするようになり、メッシュが切れれば正しい答えが得られると思われている。
- よいメッシュは解析のタイプによって異なる
  - ある程度の傾向はあるが...

27

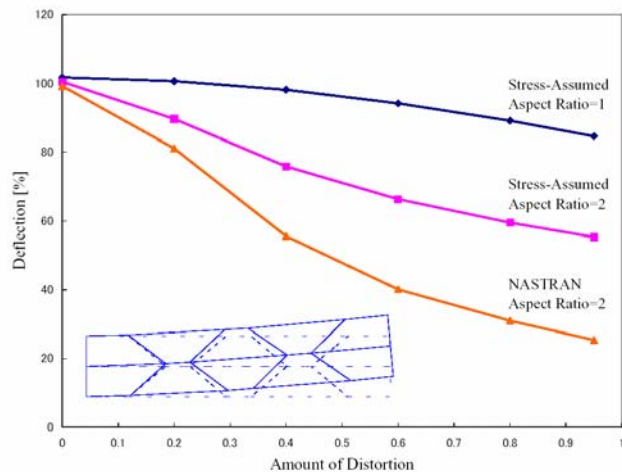
## ゆがみによる精度低下(面外変形)



第1回非線形  
CAE勉強会  
「非線形問題に  
おける要素」  
(関口、菊池)より

28

## ゆがみによる精度低下(面内変形)



第1回非線形  
CAE勉強会  
「非線形問題に  
おける要素」  
(関口、菊池)より

29

## どうすればよいか

- ゆがんでも精度の落ちない要素の開発
  - いわゆる高性能要素(非適合、混合型)
- できるだけゆがまないメッシュ生成手法
  - スムージング、最適化
- 有限要素法のメッシュからの脱却
  - メッシュフリー法
  - 重合メッシュ法

30

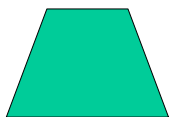
## メッシュのゆがみ(四辺形要素)



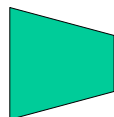
Aspect Ratio



Skew



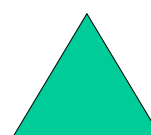
Taper in x  
direction



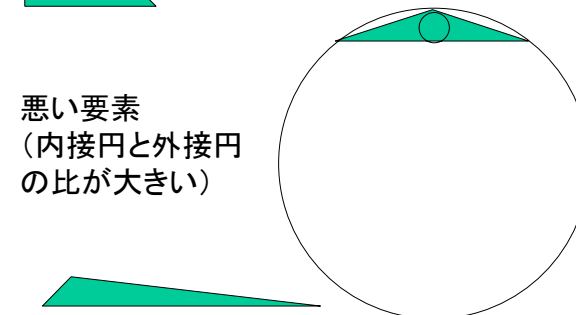
Taper in y  
direction

31

## メッシュのゆがみ(三角形要素)



よい要素



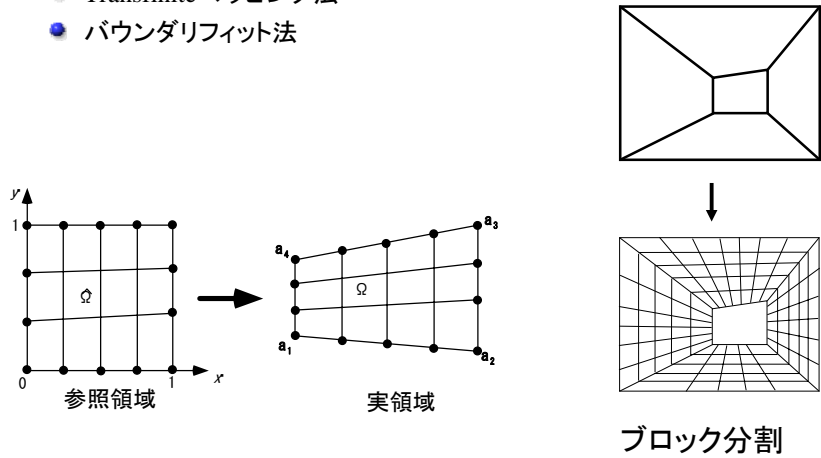
悪い要素  
(内接円と外接円  
の比が大きい)

32



# 半自動メッシュ生成法

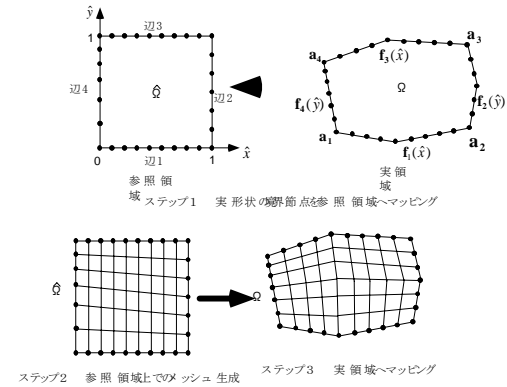
- マッピング法
- Transfinite マッピング法
- バウンダリフィット法



33

# Transfinite マッピング法

- マッピングを4角形以外の領域に拡張
- マッピング領域がゆがんでいるときはメッシュもゆがむ



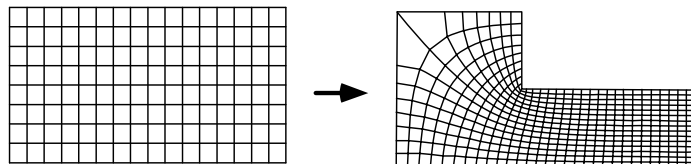
34

# バウンダリーフィット法

- 楕円型偏微分方程式を解く (Elliptic Mesh Generatorとも呼ばれる)
  - 非常になめらかな構造メッシュ
  - 凸部は疎に、凹部は密に

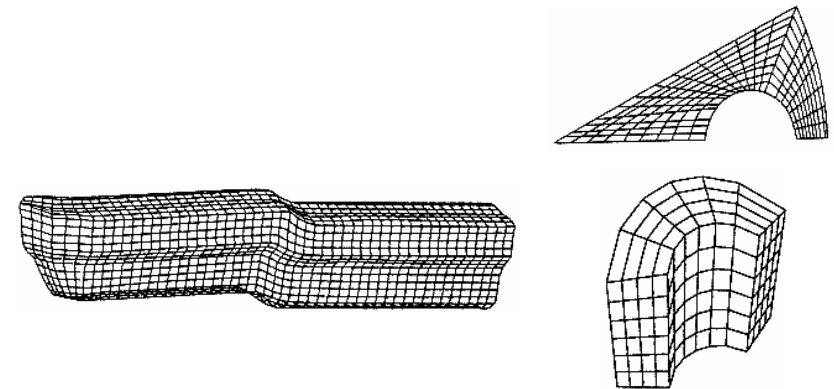
$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q$$



35

# マッピング法(2)

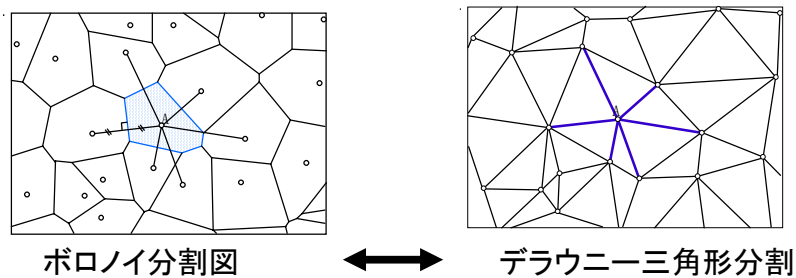


- 長所** 良い形状の要素が多く生成される。
- 短所** 対辺で節点数を等しくしなくてはならない等の制約があり、完全な自動化は行えず、複雑な形状を持つ領域にも適用できない。要素の粗密化が難しい。

36

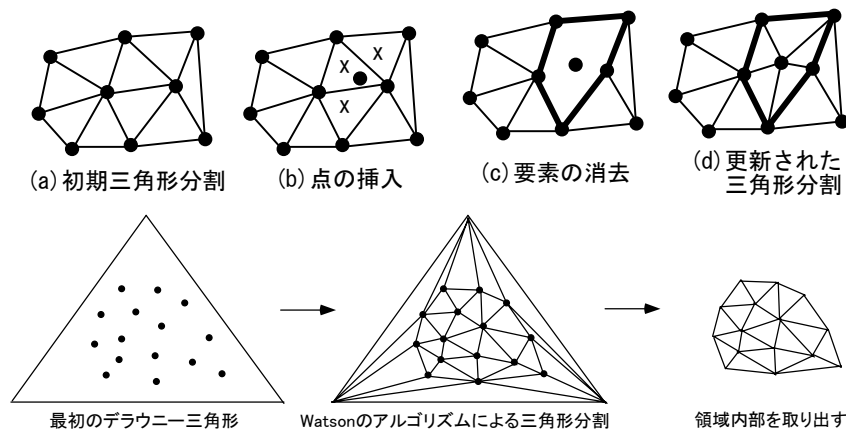
# デラウニー法

- ボロノイ分割に基づく
- 無限領域に対して解の存在が保証
- 有限要素メッシュとして質のよいメッシュ
- 3次元への拡張が容易

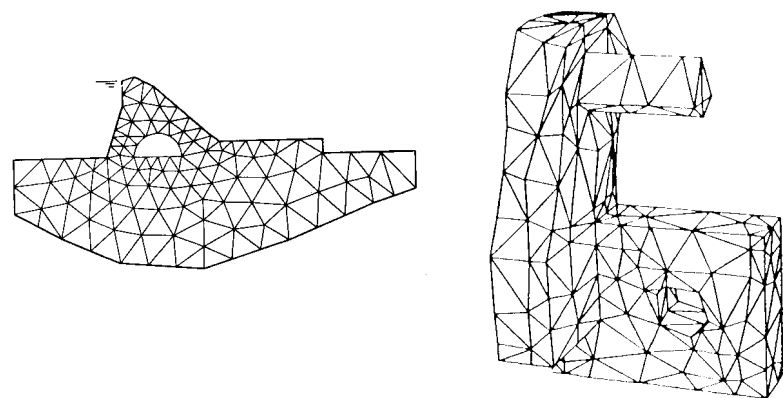


# デラウニー法によるメッシュ生成法

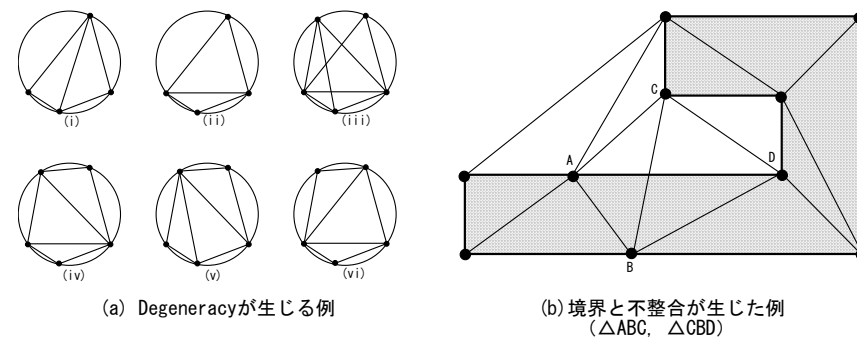
- Watsonのアルゴリズム



# メッシュ生成例

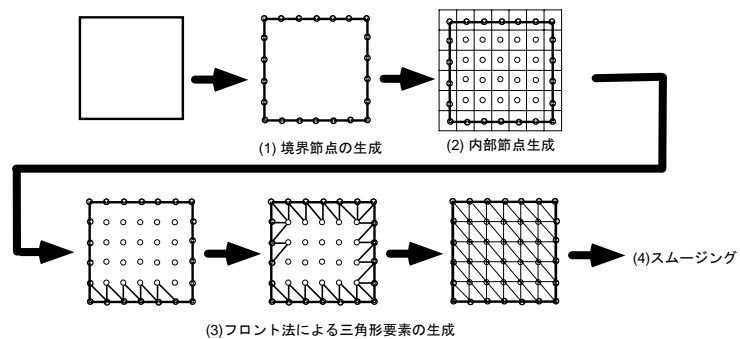


# デラウニー法の問題



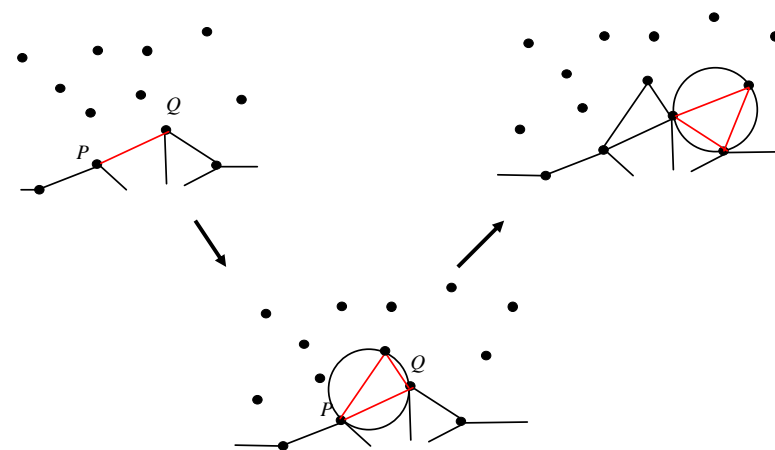
# アドバンシングフロント法

- 境界から三角形(四面体)を生成
- 非凸形状に有利
- アルゴリズムは複雑



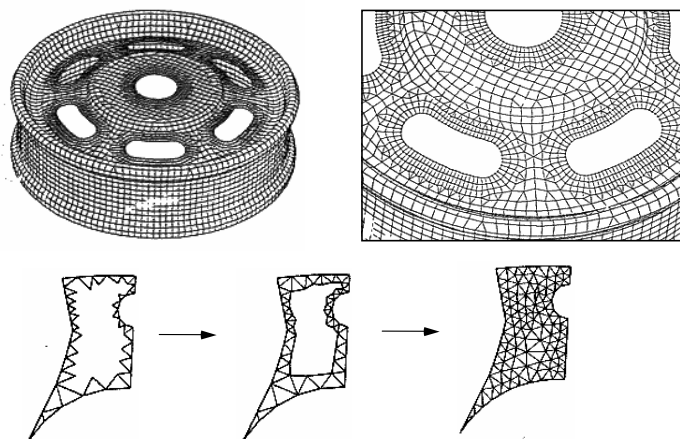
41

# アドバンシングフロント法でのメッシュ生成



42

# アドバンシングフロント法の例

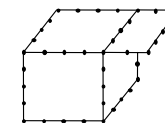


43

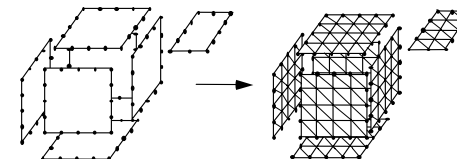
# (アドバンシング)フロント法を用いたメッシュ生成

ユーザが要素の大きさの指標を与える

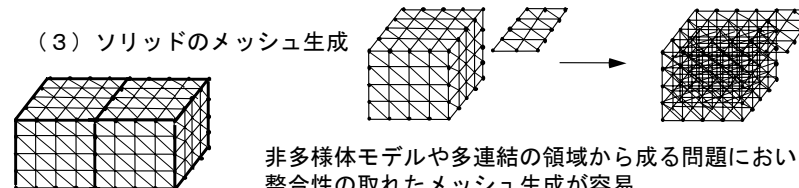
(1) 境界節点発生



(2) 面上でのメッシュ生成



(3) ソリッドのメッシュ生成



非多様体モデルや多連結の領域から成る問題において、整合性の取れたメッシュ生成が容易

44

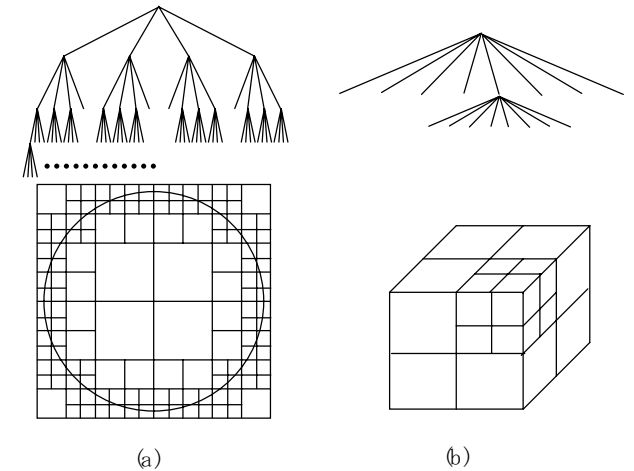
## アドバンスングフロントvs デラウニー

- アドバンスングフロント法
  - 境界面近くでいいメッシュ
  - メッシュ形状の制御可能
  - 計算量が多い
- デラウニー法
  - 数学的ベース
  - 計算量小
  - 境界での不具合

45

## 4分木法、8分木法

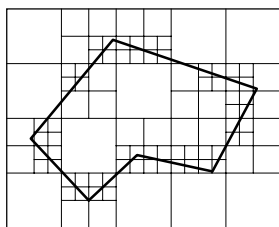
- 2次元、3次元



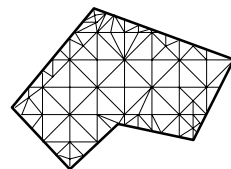
46

## メッシュ生成例

4分木



メッシュ(スムージング前)

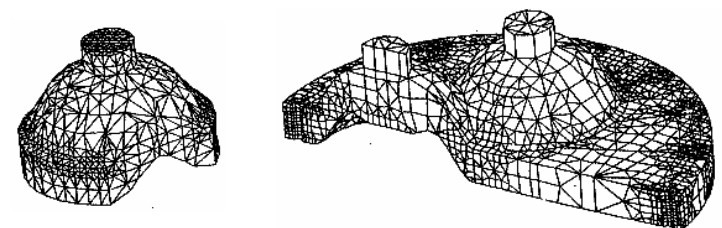
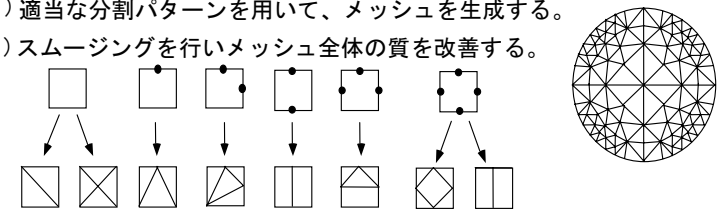


任意形状に対応  
3次元への拡張が容易(8分木法)  
要素形状があまりよくない  
力学的な問題と別に粗密が生じる

47

## 四分木・八分木法(2)

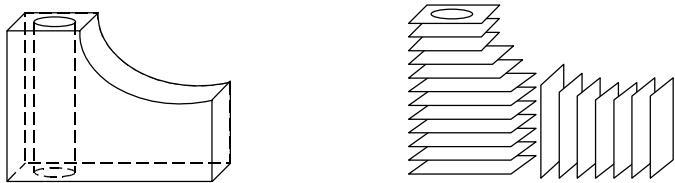
- (4) 生成された、正方形のうち領域の外部にあるものは除去し、境界線上にある正方形については、境界に適合するように正方形ブロックの形状を修正する。
- (5) 適当な分割パターンを用いて、メッシュを生成する。
- (6) スムージングを行いメッシュ全体の質を改善する。



48

## スライスカット法(断面法)

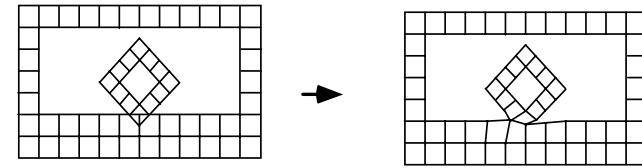
- 2.5次元体のメッシュ生成
- 完全な自動化は困難



49

## ペービング法

- 境界から順に4辺形メッシュを配置していく
- 矛盾が出たら修正する

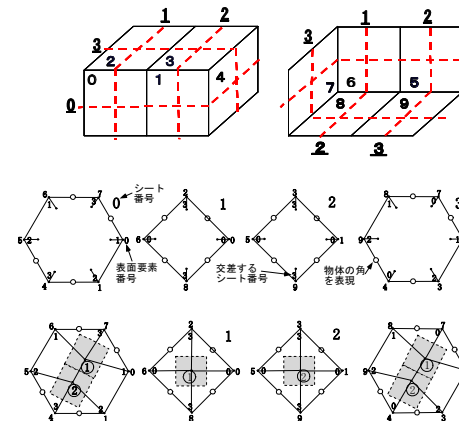


50

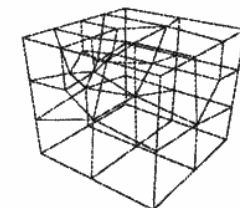
## 6面体メッシュ生成法

- Whisker Weaving法
  - 2次元のPaving法の3次元への拡張
- Grid Based法
  - 立体の内部に立方体のグリッドを配置
  - 表面を処理
- Medial Surfaceを用いた空間分割法
  - マッピングによる6面体生成が可能な基本領域に分割
  - すべての頂点において稜線が3本である必要

## Whisker Weaving法



表面の四角形分割データから内部に六面体を生成していくSTC空間上での分割  
四角形分割によっては六面体に切れない場合がある  
現状では実用化レベルのものはない

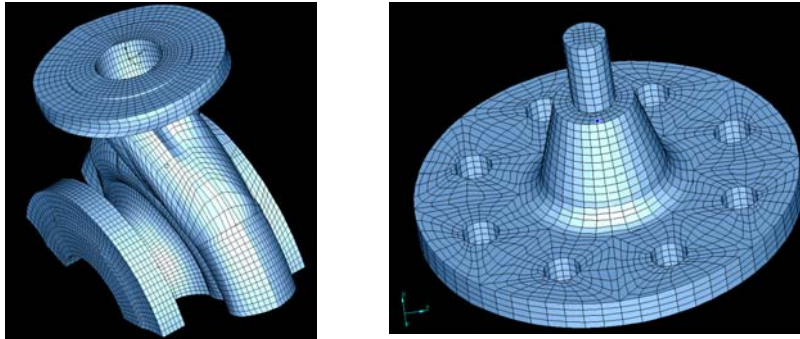


51

52

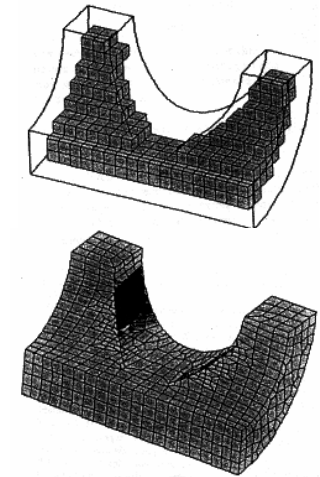
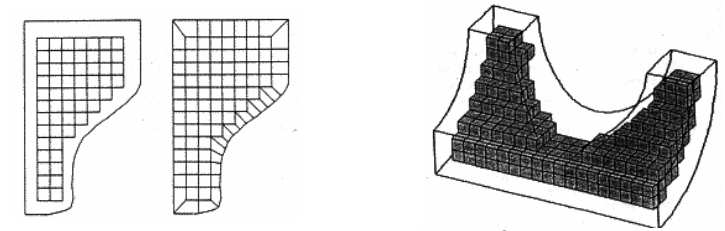
# Whisker Weaving

- 表面の四角形メッシュから、内部に六面体メッシュを作成していく (Muller-Hannemann)



53

# Grid Based法、オーバーレイ法



複雑な形状を有する問題には適用できない。  
市販されている物もある。

54

# Medial Surfaceを用いた方法

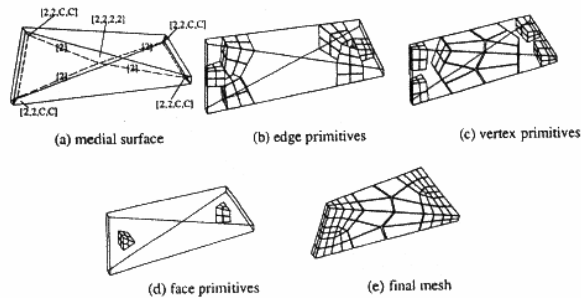


Figure 28. Example 1, showing stages in meshing the tapered brick

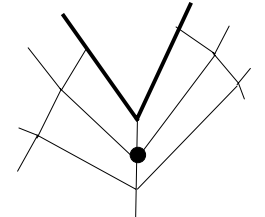
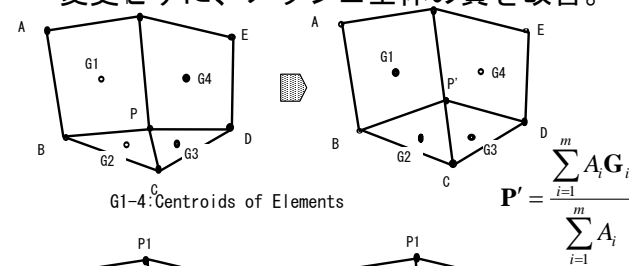
すべての頂点において稜線が3本である必要がある。  
実用化されているものもある。

55

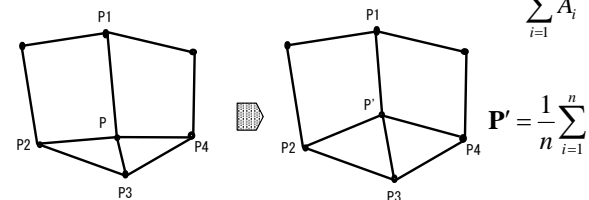
# スムージング (Smoothing)

メッシュ生成が終了した後に、メッシュのトポロジーを変更せずに、メッシュ全体の質を改善。

凹状の境界付近では、注意が必要。



要素形状が悪くなる場合



56