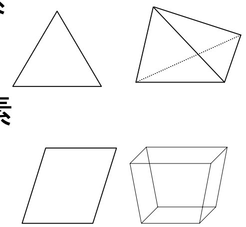
人工環境設計解析工学
FEMにおける要素
（第5回）

東京大学
新領域創成科学研究科
鈴木克幸

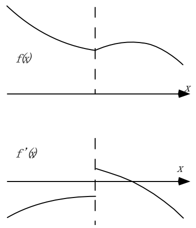
様々な要素

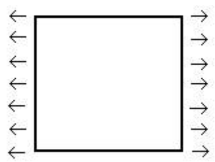
- Lagrange要素
  - 主に三角形要素・四面体要素
- Isoparametric要素
  - 主に四辺形要素、六面体要素
- その他
  - 混合要素
  - 非適合要素
  - ハイブリッド要素
  - 拡張ひずみ要素



要素に求められる性能

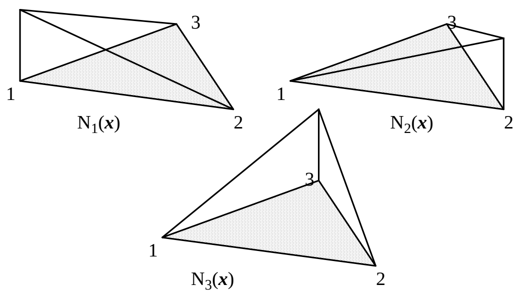
- 要素間の連続性
  - 節点のみでなく、要素間の辺、面
  - 微係数が不連続はOK
- パッチテスト
  - 一定応力、一定ひずみの場を厳密に表現できるか
  - 有限要素の近似能力を表現する1つの指標





三角形要素の形状関数

- 要素内のある節点で1となり、他の節点で0となる関数
- 三角形要素では1次関数

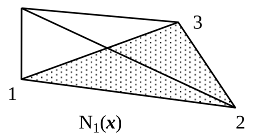


形状関数の導出

$$u(x,y)=\sum_i N_i(x,y)d_i$$

$$N_1(x,y)=c_0+c_1x+c_2y$$

$$N_1(x,y)=\begin{cases}1 & \text{at node1}\\ 0 & \text{at other nodes}\end{cases}$$

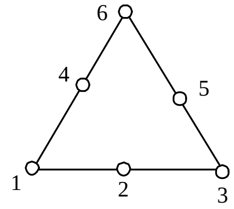


$$\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

高次要素

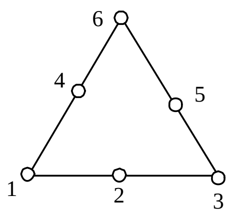
- 2次要素

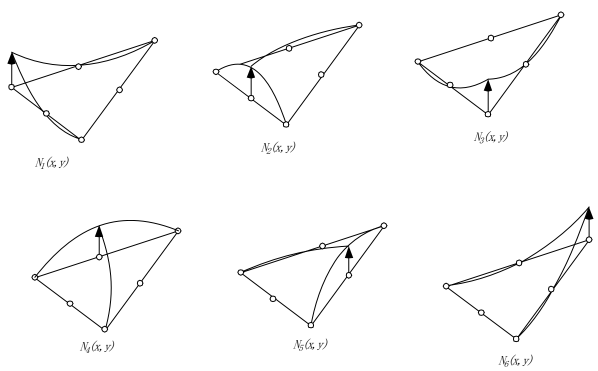
$$f(x,y)=a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6$$



$$\begin{bmatrix}x_1^{\ 2} & x_1y_1 & y_1^{\ 2} & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^{\ 2} & x_2y_2 & y_2^{\ 2} & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^{\ 2} & x_3y_3 & y_3^{\ 2} & x_3 & y_3 & 1\\ x_4^{\ 2} & x_4y_4 & y_4^{\ 2} & x_4 & y_4 & 1\\ x_5^{\ 2} & x_5y_5 & y_5^{\ 2} & x_5 & y_5 & 1\\ x_6^{\ 2} & x_{61}y_6 & y_6^{\ 2} & x_6 & y_6 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\\ a_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

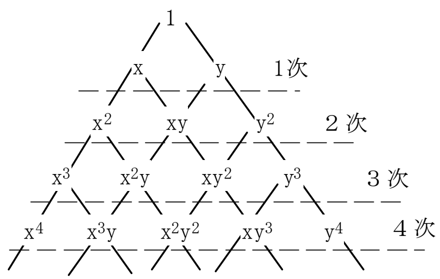
2次要素の形状関数

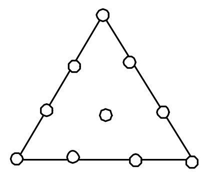




より高次の要素

- パスカルの三角形
  - N次完全多項式



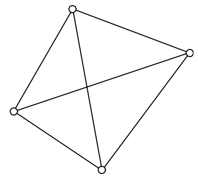


3次要素

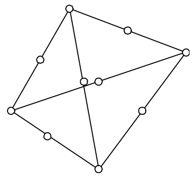
四面体

- 一次要素
  - ４節点
  - 実務では使われない

$$f\left(x,y,z\right)=a_1x+a_2y+a_3z+a_4$$



- 二次要素
  - １０節点

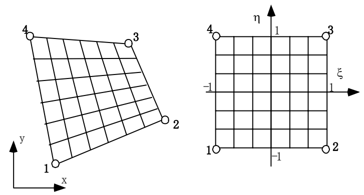


$$f\left(x,y,z\right)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4yz+a_5xz+a_6xy$$
$$+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}$$

アイソパラメトリック要素

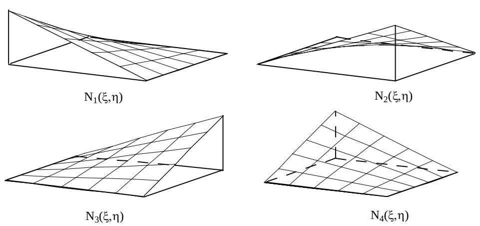
- 任意の四辺形形状をパラメータ座標系にマッピング

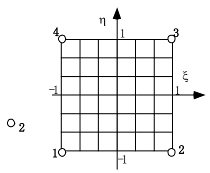
$$x\left(\xi,\eta\right)=N_1\left(\xi,\eta\right)x_1^e+N_2\left(\xi,\eta\right)x_2^e+N_3\left(\xi,\eta\right)x_3^e+N_4\left(\xi,\eta\right)x_4^e$$
$$y\left(\xi,\eta\right)=N_1\left(\xi,\eta\right)y_1^e+N_2\left(\xi,\eta\right)y_2^e+N_3\left(\xi,\eta\right)y_3^e+N_4\left(\xi,\eta\right)y_4^e$$



形状関数

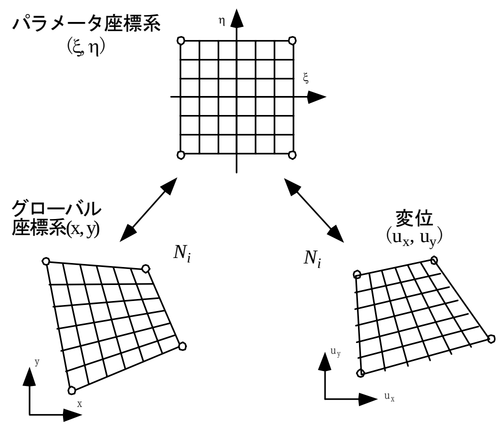
$$N_1\left(\xi,\eta\right)=\frac{\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)}{4}\qquad N_2\left(\xi,\eta\right)=\frac{\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right)}{4}$$
$$N_3\left(\xi,\eta\right)=\frac{\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right)}{4}\qquad N_4\left(\xi,\eta\right)=\frac{\left(1-\xi\right)\left(1+\eta\right)}{4}$$





アイソパラメトリック要素

- 変位と座標系に同じ形状関数



アイソパラメトリック要素

- 座標系

$$x(\xi,\eta)=N_1(\xi,\eta)x_1^e+N_2(\xi,\eta)x_2^e+N_3(\xi,\eta)x_3^e+N_4(\xi,\eta)x_4^e$$

$$y(\xi,\eta)=N_1(\xi,\eta)y_1^e+N_2(\xi,\eta)y_2^e+N_3(\xi,\eta)y_3^e+N_4(\xi,\eta)y_4^e$$

- 変位

$$u_x(\xi,\eta)=N_1(\xi,\eta)u_{x1}^e+N_2(\xi,\eta)u_{x2}^e+N_3(\xi,\eta)u_{x3}^e+N_4(\xi,\eta)u_{x4}^e$$

$$u_y(\xi,\eta)=N_1(\xi,\eta)u_{y1}^e+N_2(\xi,\eta)u_{y2}^e+N_3(\xi,\eta)u_{y3}^e+N_4(\xi,\eta)u_{y4}^e$$

要素剛性マトリクスの計算1

$$B=\left[\begin{array}{cc|cc|c}\partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & \cdots \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \end{array}\right]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

要素剛性マトリクスの計算2

$$\frac{\partial x}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=1$$

$$\begin{bmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta\\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta\\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta\end{bmatrix}^{-1}$$

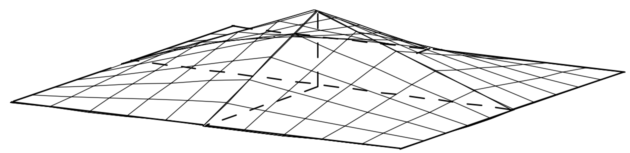
$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i^e \qquad \frac{\partial x}{\partial\eta}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i^e$$

$$\frac{\partial y}{\partial\xi}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i^e \qquad \frac{\partial y}{\partial\eta}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i^e$$

$$J=\begin{bmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta\\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta\end{bmatrix}$$

要素間の連続性

- 一次関数同士なので、連続性は保たれる



なぜ単純な双一次ではダメか

- 4節点の座標から双一次の係数を決めると

$$f(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy$$

$$x = a_1 + a_2 t$$
$$y = b_1 + b_2 t$$

$$f(t) = \cdots + a_2 b_2 c_3 t^2$$

座標軸に平行でない辺は、2次関数になってしまう

変位とひずみ

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{xi} \\ \tilde{u}_{yi} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} N_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & N_1 & & & \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_{x1}^e \\ u_{y1}^e \\ \vdots \\ u_{x1}^e \\ u_{y4}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}_i^e$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = \nabla^* \tilde{\mathbf{u}}_i = \nabla^* \mathbf{N}\mathbf{u}_i^e \equiv \mathbf{B}\mathbf{u}_i^e$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} \partial N_1/\partial x & 0 & & & \\ 0 & \partial N_1/\partial y & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & & & \end{array}\right]$$

要素剛性マトリクス

$$K^e = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \begin{vmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial x/\partial \eta \\ \partial y/\partial \xi & \partial y/\partial \eta \end{vmatrix} d\xi d\eta$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta$$

積分は、一般にガウス積分が用いられる

アイソパラメトリック2次要素

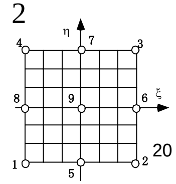
$$N_1(\xi,\eta) = \frac{(1-\xi)\xi(1-\eta)\eta}{4} \qquad N_2(\xi,\eta) = \frac{(1+\xi)\xi(1-\eta)\eta}{4}$$

$$N_3(\xi,\eta) = \frac{(1+\xi)\xi(1+\eta)\eta}{4} \qquad N_4(\xi,\eta) = \frac{(1-\xi)\xi(1+\eta)\eta}{4}$$

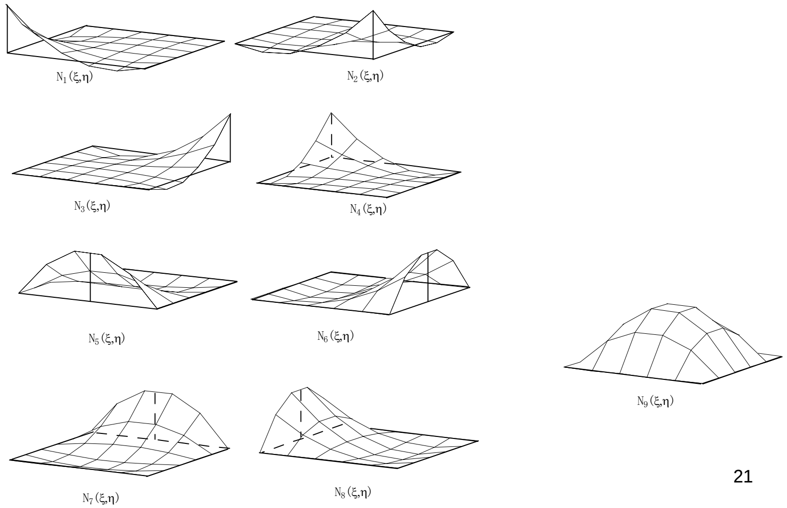
$$N_5(\xi,\eta) = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)\eta}{2} \qquad N_6(\xi,\eta) = \frac{(1+\xi)\xi(1-\eta^2)}{2}$$

$$N_7(\xi,\eta) = \frac{(1-\xi^2)\xi(1+\eta)\eta}{2} \qquad N_8(\xi,\eta) = \frac{(1-\xi)\xi(1-\eta^2)}{2}$$

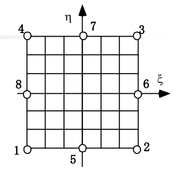
$$N_9(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$



アイソパラメトリック2次要素



2次セレンディピティ要素



- 8節点

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)}{4}$$

$$N_2(\xi,\eta)=\frac{(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)}{4}$$

$$N_3(\xi,\eta)=\frac{(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)}{4}$$

$$N_4(\xi,\eta)=\frac{(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)}{4}$$

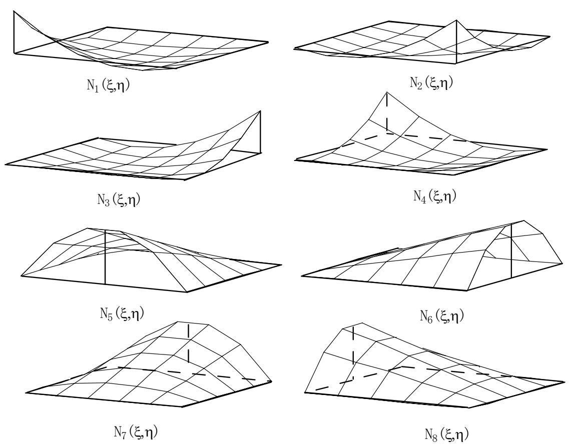
$$N_5(\xi,\eta)=\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$$

$$N_6(\xi,\eta)=\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$$

$$N_7(\xi,\eta)=\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$$

$$N_8(\xi,\eta)=\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$$

セレンディピティ要素

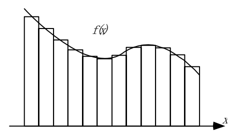


ガウス積分

- いくつかのサンプリング点で積分値を評価
- 重みとサンプリング点の位置を最適に配置

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

何次多項式まで正確に積分可能か



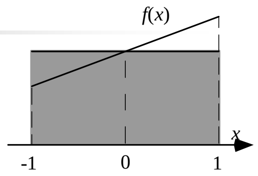
等間隔なサンプリング点
シンプソン則
台形則
中点則

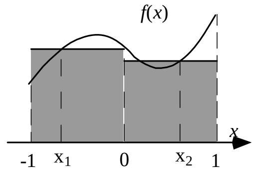
ガウス積分

■ 1次多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

$$\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x) dx = 2a_0 = 2f(0)$$





■ 2次多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3) d\xi = 2a_0 + (2/3) a_2$$

$$= f\left(1/\sqrt{3}\right) + f\left(-1/\sqrt{3}\right)$$

ガウス積分

■ 一般に、n点の関数評価で2n+1次の多項式を正確に評価できる。

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

1点

$$\xi_1 = 0 \quad w_1 = 2$$

2点

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_1 = 1$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_2 = 1$$

3点

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad w_1 = \frac{5}{9}$$

$$\xi_2 = 0 \quad w_2 = \frac{5}{9}$$

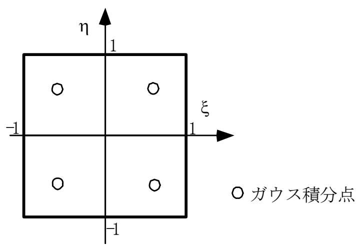
$$\xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad w_3 = \frac{5}{9}$$

Legendre多項式の根より求められる

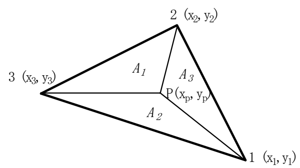
多次元

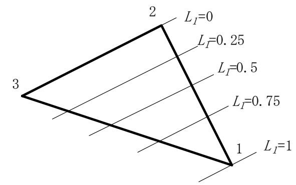
■ 2次元のガウス積分

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta) d\xi d\eta = \sum_{i,j} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j)$$



三角形要素:面積座標



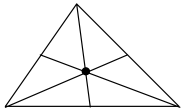


$$L_i = \frac{A_i}{A} \qquad \sum L_i = 1$$

三角形要素の積分

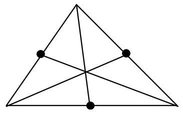
- 1点
  - 1次

$$L_i = (1/3, 1/3, 1/3)$$
$$w_i = 1$$



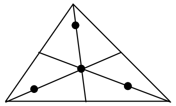
- 3点
  - 2次

$(1/2, 1/2, 0)$ $1/3$
$(1/2, 0, 1/2)$ $1/3$
$(0, 1/2, 1/2)$ $1/3$



- 4点
  - 3次

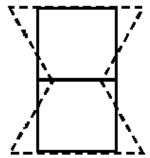
$(1/3, 1/3, 1/3)$ $-27/48$
$(3/5, 1/5, 1/5)$ $25/48$
$(1/5, 3/5, 1/5)$ $25/48$
$(1/5, 1/5, 3/5)$ $25/48$



$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3)\, dL_2\, dL_1$$

次数低減積分

- 有限要素法の解は連続体より固い
- 積分の次数を2点から1点にすることにより精度が上がることが多い。
- 特に、せん断ロッキングが回避される
- アワーグラスモードが発生し、これに対する対処が必要
  - 剛性の付加
  - 選択低減積分



アワーグラスモード

混合要素とハイブリッド要素

- 混合要素
  - 変位のみでなく、複数の量で場を記述
  - 変位場と応力場で記述（u-σ）
  - 変位場とひずみ場、応力場で記述（u-ε-σ）
- ハイブリッド要素
  - 場は変位で記述し、要素境界で別の量を定義
  - 要素境界上でのみ応力場を定義（Pian-Sumihara要素）

課題

- 以下の要素がパッチテストを通ることを示せ。（一定のひずみ場を厳密に再現できることを示せ）
  - 2次三角形要素
  - 1次、2次アイソパラメトリック四辺形要素
  - 2次セレンディピティ四辺形要素