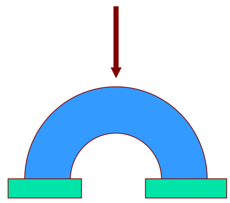
人工環境設計解析工学
構造力学と有限要素法

東京大学
新領域創成科学研究科
鈴木克幸

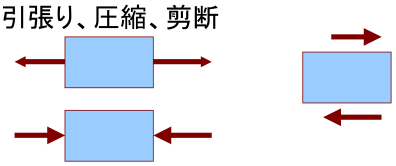
構造力学とは

- 荷重
  - 応力
  - ひずみ
- 変形
- 強度

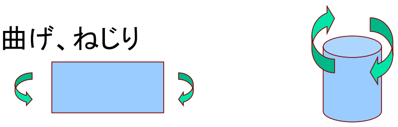


荷重

- 引張り、圧縮、剪断

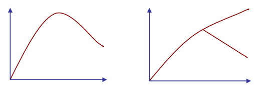


- 曲げ、ねじり



構造設計の目的

- 予想される荷重に対して耐えうる用にする。
  - 様々な荷重
    - 自重
    - 風荷重
    - 波浪荷重
    - 衝突荷重
  - 様々な破壊モード
    - 破断　～延性、脆性
    - 座屈　～分岐、臨界
    - 疲労



- 運用上十分な剛性を持つ
- 上記の条件内で、できるだけ軽く、安くする

安全な設計

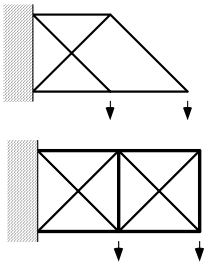
- 安全率を高くする
- フェールセーフ構造
  - 99%の信頼性のものが2つあれば99.99%の信頼性
- 確率、統計→信頼性工学
  - アポロ計画　99.9999%の信頼性

フェールセーフ構造

- 部分的な破壊が生じても全体的な破壊に至らない
  - クラックの進展しにくい材料
    - 点検により発見　～点検しやすい構造
  - 不静定構造→部材の並列化

静定構造と不静定構造

- トラス

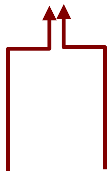


静定

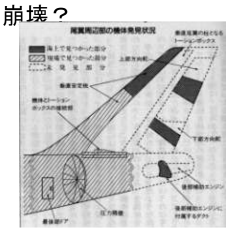
不静定

日航747の事故

- 1985年8月
  - フェールセーフ神話の崩壊？



油圧系統



引っ張り、圧縮に耐える構造

- 引っ張りに適した構造
  - 鋼材　～圧縮と引っ張りはほぼ同じ
  - 細くできる　→軽量化に適する
  - 接合部に注意
- 圧縮に耐える構造
  - コンクリート、石（引っ張り強度は圧縮の1/10以下）
  - 細くしない～座屈
  - 接合部の構造が簡単　技術を要しない
    - ピラミッド

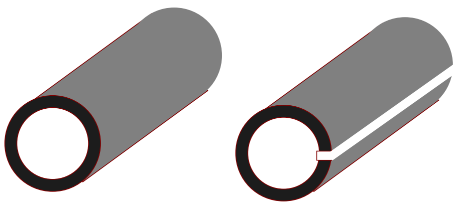
  - バベルの塔はなぜ壊れたか

延性破壊と脆性破壊

- 延性破壊
  - 鋼材
  - 塑性
- 脆性破壊
  - クラックの発生
  - ガラス、コンクリート
  - 低温の鋼材　　LNG船

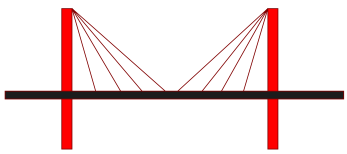
ねじりに耐える構造

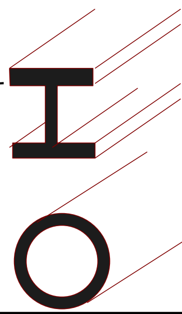
- 開断面と閉断面
- 開断面でも短ければ曲げで持つ



曲げに強い構造

- 一般に、曲げは避けるべき
- 橋梁
- 断面2次モーメントを増やす

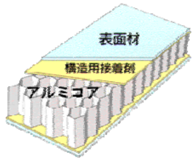




サンドイッチ板

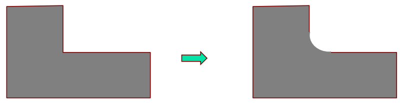
- 曲げ剛性を高くした板

- ハニカムサンドイッチ
  - 床板、航空機、ロケット



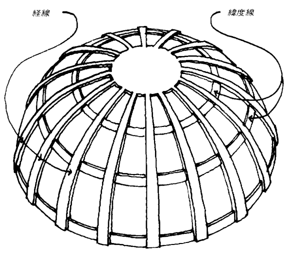
応力集中を防ぐ

- コーナー部にはRをつける
- 応力集中を防ぐ形状



ドーム構造

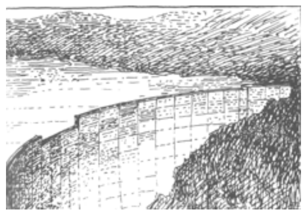
- 圧縮

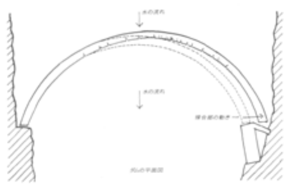


ローマ：パンテオン（紀元前27年）

マルパッセ・ダムの崩壊

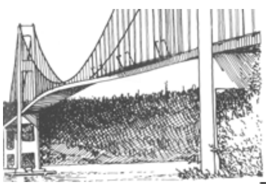
- フランス・1959年





タコマ橋の崩壊

- ワシントン州タコマ・1940年

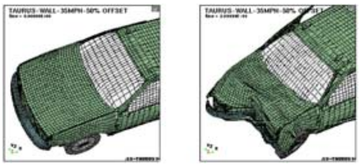


CAE（ Computer Aided Engineering ）

- Dr. Jason Lemon (SDRC, 1980)
  - 設計者が解析ツールを使いこなすことにより、設計の評価、設計の質の向上を図る
  - Engineeringの本質の、計算機による支援（CAD、CAMなどより広い名前）
    - 様々な汎用ソフトの登場
    - 工業製品の設計に不可欠のツール
      - 構造解析
      - 流体解析
      - 運動解析
      - 最適設計

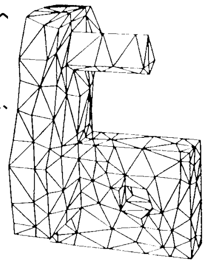
製品設計におけるCAE

- 自動車
  - 衝突
  - 振動、騒音
  - 操縦安定性
  - 空気抵抗



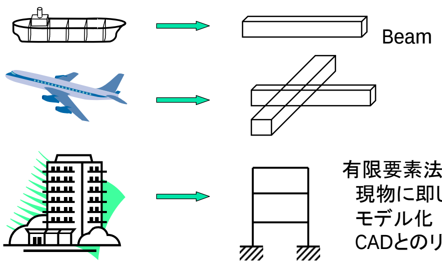
有限要素法(Finite Element Method, FEM)

- 連続体の離散化解法
  - 無限自由度から有限自由度へ
  - 構造解析
    - 線形、固有振動、大変形、塑性、
  - 流体解析
    - 空気、水、粘性流、
  - 電磁気
  - 熱物質



有限要素法以前

- ノウハウにより簡略化



有限要素法以後
現物に即した
モデル化
CADとのリンク

代表的なソフトウェア

- 構造解析
  - 線形、固有振動
    - MSC.Nastran, ANSYS
  - 非線形(陰解法)
    - ABAQUS, MSC.Marc
  - 非線形(陽解法)
    - LS-DYNA, PamCrash

線形と非線形

- 現実は非線形
- 実用上は線形でOKなことがほとんど
  - 微小変形，固有振動
  - CAEとして製品開発に使われている解析の90%は線形解析
- 非線形でなければ表現できない現象
  - 座屈，破壊，接触

線形解析とは

- 線形の偏微分方程式
  ↓
- 線形の連立方程式

- 荷重が2倍になれば変位，応力も2倍
- 複数の荷重は重ね合わせればよい

線形静弾性解析で扱える範囲

- 静的問題
  - 時間変化なし
- 微小変形
  - 変形が小さい
- 弾性変形
  - 塑性する前まで

なぜ実用上線形解析が多いか

- 非線形解析は計算時間がかかる
  - 線形の数倍
- 非線形解析には専門知識，ノウハウが不可欠
- 応力を評価すれば破壊が予測可能
  - 実際のメカニズムはもっと複雑．亀裂進展など
- 構造物は普通は固いので変形は微小

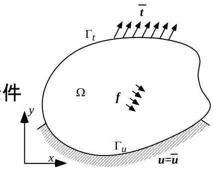
固体力学の基礎方程式

- 変位-ひずみの関係
  - 適合条件式
- ひずみ-応力の関係
  - 構成方程式
- 応力-外力の関係
  - 平衡方程式

} 場の方程式

- 境界条件
  - 変位規定境界
  - 反力規定境界

} 境界条件



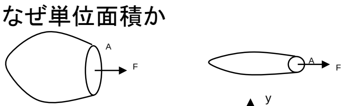
構造力学の基礎式

荷重 ⇄ 応力 ⇄ ひずみ ⇄ 変形

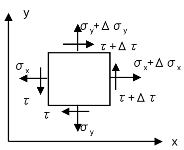
平衡方程式　構成方程式　適合条件式

応力

- 一軸
  - なぜ力でなく応力か
  - なぜ単位面積か



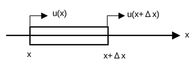
- 多軸
  - 2次元、3次元



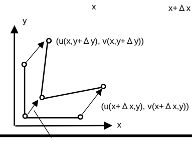
ひずみ

- 一軸
  - なぜ変位でなくひずみか

$$\varepsilon=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=\frac{u(x)+\frac{du}{dx}\Delta x-u(x)}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$



- 多軸
  - のびひずみ
  - 剪断ひずみ



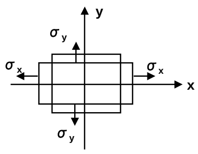
応力とひずみの関係

- 一軸

フックの法則（線形）

$$\sigma = E\varepsilon$$

- 多軸



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}$$

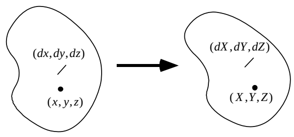
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \tau = G\gamma$$

変位

- 変形前、変形後の座標

$$\begin{cases} u = X - x \\ v = Y - y \\ w = Z - z \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i dx_i \qquad dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX_i dX_i$$



変位とひずみ

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)dz = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

$$\begin{aligned} dS^2 - ds^2 = &\left\{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dx^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dy^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dz^2 \end{aligned}$$

変位とひずみ2

$$\begin{aligned} &= \left\{2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dx^2 \\ &+ \left\{2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dy^2 \\ &+ \left\{2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}dz^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dxdy \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}dydz \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}dzdx \end{aligned}$$

ひずみ（Greenのひずみ）

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

直ひずみ

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

剪断
ひずみ

金属系の材料では1%以下

課題1

- Greenのひずみを自分で計算せよ
- 2次元でも3次元でもOK