シミュレーション工学（後半）

第3回
線形静弾性解析

線形と非線形

- 現実は非線形
- 実用上は線形でOKなことがほとんど
  - 微少変形，固有振動
  - CAEとして製品開発に使われている解析の90%は線形解析
- 非線形でなければ表現できない現象
  - 座屈，破壊，接触

線形解析とは

- 線形の偏微分方程式
  ↓
- 線形の連立方程式

- 荷重が2倍になれば変位，応力も2倍
- 複数の荷重は重ね合わせればよい

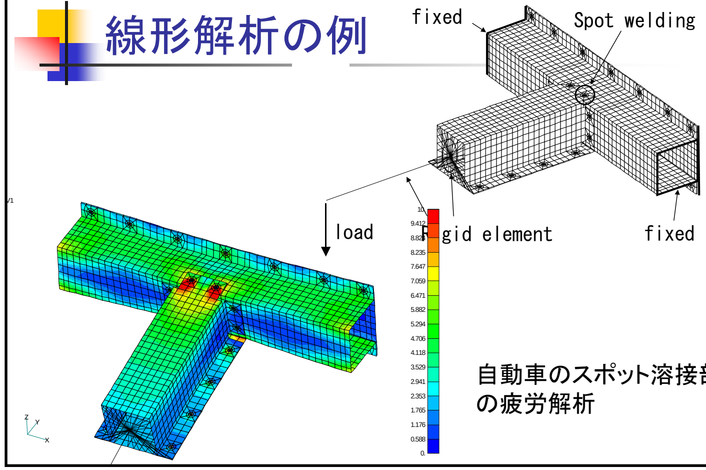
線形静弾性解析で扱える範囲

- 静的問題
  - 時間変化なし
- 微小変形
  - 変形が小さい
- 弾性変形
  - 塑性する前まで

なぜ実用上線形解析が多いか

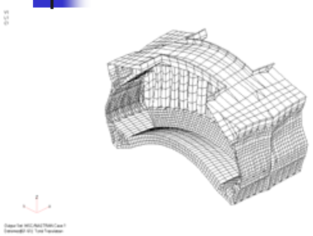
- 非線形解析は計算時間がかかる
  - 線形の数倍
- 非線形解析には専門知識，ノウハウが不可欠
- 応力を評価すれば破壊が予測可能
  - 実際のメカニズムはもっと複雑．亀裂進展など
- 構造物は普通は固いので変形は微少

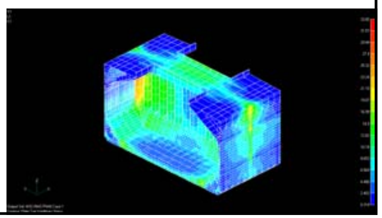
線形解析の例



自動車のスポット溶接部の疲労解析

線形解析の例2





バルクキャリアーの横断面

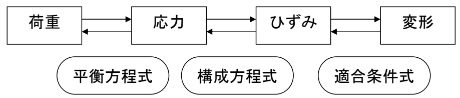
固体力学の基礎方程式

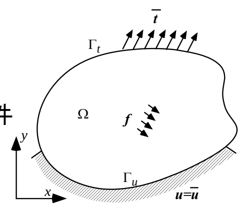
- 変位-ひずみの関係
  - 適合条件式
- ひずみ-応力の関係
  - 構成方程式
- 応力-外力の関係
  - 平衡方程式

} 場の方程式

- 境界条件
  - 変位規定境界
  - 反力規定境界

} 境界条件



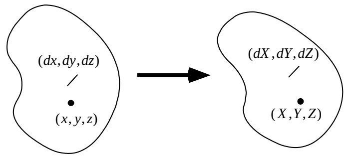


変位

- 変形前、変形後の座標

$$\begin{cases} u = X - x \\ v = Y - y \\ w = Z - z \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i dx_i \qquad dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX_i dX_i$$



変位とひずみ

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)dz = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

$$\begin{aligned} dS^2 - ds^2 = &\left\{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dx^2 \\ &+\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dy^2 \\ &+\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dz^2 \end{aligned}$$

変位とひずみ2

$$\begin{aligned} &= \left\{2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dx^2 \\ &+ \left\{2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dy^2 \\ &+ \left\{2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}dz^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dxdy \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}dydz \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}dzdx \end{aligned}$$

ひずみ（Greenのひずみ）

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

直ひずみ

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

剪断
ひずみ

金属系の材料では1%以下

変位-ひずみの関係（2次元、線形）

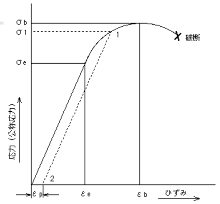
- 変位 $\{u_x, u_y\}$
- ひずみ $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$
- 変位が十分小さいとき、線形の関係

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$$

ベクトル表示　$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^* \boldsymbol{u}$

ひずみ-応力関係式

- Hookeの法則



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

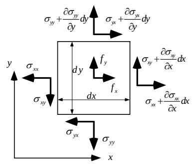
等方弾性
（平面応力問題 ）

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

E :ヤング率
ν :ポアソン比

応力と外力の釣り合い

- 微小領域における釣り合い



$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & \partial / \partial y \\ 0 & \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

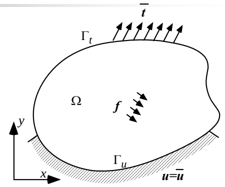
$\nabla^{*T} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$

境界条件

- 変位の境界条件

$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}$

- 荷重の境界条件



$N_x \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{t}}$

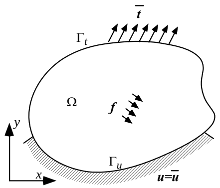
$$N_x = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

基礎方程式

$$\nabla^{*T}(D\nabla^{*}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

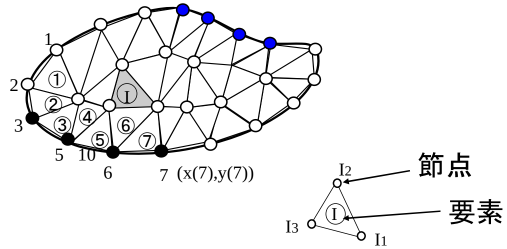
$$N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{t}} \quad on \quad \Gamma_t$$



偏微分方程式の境界値問題
変位表記
　状態変数　変位
　自己随伴
解析解を求めるのは困難
　　→数値解

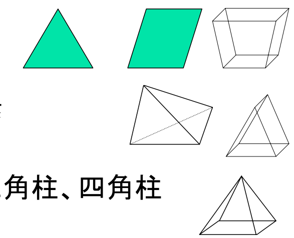
有限要素離散

- 領域を、単位領域（要素）に分割



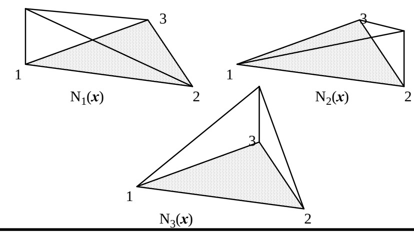
有限要素法のメッシュ

- 2次元
  - 三角形、四辺形
  - 1次要素、高次要素
- 3次元
  - 四面体、六面体、三角柱、四角柱
  - プログラムによってはこれ以外のサポートもあるケースがある。

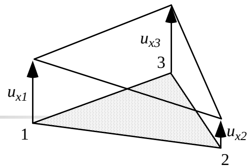


形状関数

- 要素内のある節点で1となり、他の節点で0となる関数
- 三角形要素では1次関数



変位の近似



- 形状関数と節点での値

$$\tilde{u}_x(x,y) = u_{x1}N_1(x,y) + u_{x2}N_2(x,y) + u_{x3}N_3(x,y)$$
$$\tilde{u}_y(x,y) = u_{y1}N_1(x,y) + u_{y2}N_2(x,y) + u_{y3}N_3(x,y)$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{xi} \\ \tilde{u}_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i = N\boldsymbol{u}_i$$

ひずみ、応力の近似

- 変位を微分
- 三角形要素では要素内で一定値

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \nabla^* \boldsymbol{u}_i = \nabla^* N \boldsymbol{u}_i \equiv B\boldsymbol{u}_i$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = D\boldsymbol{\varepsilon}_i = DB\boldsymbol{u}_i$$

弱形式とエネルギー原理

- 変分原理

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T \left(\nabla^{*T}\left(D\nabla^*\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{f}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \left(\left(N_x D\nabla^*\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{t}}\right)\right) d\Gamma = 0$$
$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

⇩

$$\int_\Omega \left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^*\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{u}^T f\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$
$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

仮想仕事の原理

仮想変位による内部エネルギーの増加分＝外力の仕事

$$\int_\Omega \left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^*\boldsymbol{u} d\Omega \quad = \quad \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma$$

なぜ弱形式か

- 1次関数で近似するとひずみは要素間で不連続
- 2階微分は存在しない

$$\int_\Omega \left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^*\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{u}^T f\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$

要素ごとの積分

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^*\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}\right) d\Omega - \sum_i \int_{\Gamma_{ti}} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma = 0$$

有限要素離散の弱形式

- 変位 $\boldsymbol{u} = B\boldsymbol{u}_i$
- 仮想変位 $\delta\boldsymbol{u} = B\delta\boldsymbol{u}_i$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left((B\delta\boldsymbol{u}_i)^T DB\boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} (N\delta\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} (N\delta\boldsymbol{u}_i)^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\delta\boldsymbol{u}_i^T B^T DB\boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

要素剛性マトリクスと全体剛性マトリクス

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\delta\boldsymbol{u}_i^T B^T DB\boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

$$\delta\boldsymbol{u}^T K\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}$$

全体剛性マトリクス $K = \sum_i \int_{\Omega_i} \left(B^T DB \right) d\Omega$ 要素剛性マトリクス

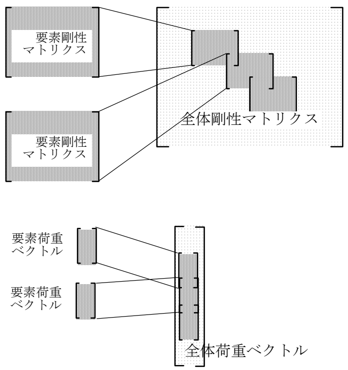
全体荷重ベクトル $\boldsymbol{f} = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$ 要素荷重ベクトル

$$K\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

有限要素法の剛性方程式
→線形連立方程式ソルバー

剛性マトリクス、荷重ベクトルの足し合わせ

- 全体自由度の中の相当する位置に足し込む



課題

- 板書で例題を行う
- 課題：以下の問題を有限要素法を用いて解く．板書の続きを行い、要素剛性マトリクス，全体剛性マトリクスを求めよ。