シミュレーション工学（後半）

第４回
動的解析

動的解析の種類

- 過渡応答解析
  - 線形
  - 非線形
- 固有振動解析
  - 線形

動的問題と静的問題

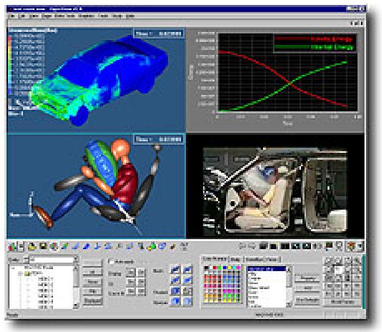
- 静的問題では力が釣り合う

  ΣF=0
- 動的問題では不釣り合い力が加速度を生じる

  ΣF=ma

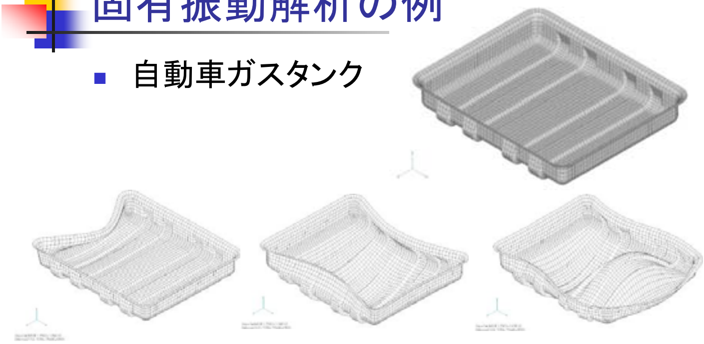
過渡応答解析の例

- 時間を追って解析



固有振動解析の例

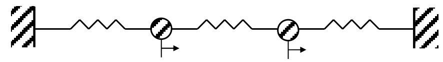
- 自動車ガスタンク



1次 129.6 Hz　　2次 374.8 Hz　　3次 547.9 Hz

バネマスモデル

- 詳細は板書で



$$K\boldsymbol{u} + M\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}$$

一般には

$$K\boldsymbol{u} + C\dot{\boldsymbol{u}} + M\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f}$$

減衰

- 現実の振動は必ず減衰
- 理論的に評価は困難
- 実験、経験により評価
  - 構造減衰
  - 質量減衰

$$C = \alpha K + \beta M$$

固有振動問題

- モード解析、モーダル解析

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\sin(\omega t)$$

$$K\boldsymbol{a} = \omega^2 M\boldsymbol{a}$$

ω　固有振動数
$\boldsymbol{a}$　固有振動モード

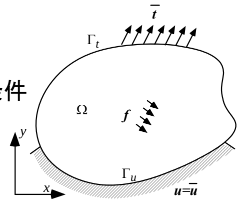
固体力学の基礎方程式

- 変位-ひずみの関係
  - 適合条件式
- ひずみ-応力の関係
  - 構成方程式
- 応力-外力の関係
  - 平衡方程式

$\}$ 場の方程式

- 境界条件
  - 変位規定境界
  - 反力規定境界

$\}$ 境界条件



変位-ひずみの関係(同じ)

- 変位 $\{u_x, u_y\}$
- ひずみ $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$
- 変位が十分小さいとき、線形の関係

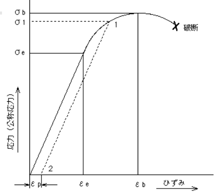
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$$

ベクトル表示 $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^* \boldsymbol{u}$

ひずみ-応力関係式(同じ)

- Hookeの法則

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

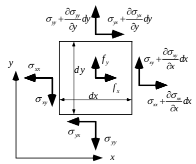
等方弾性
(平面応力問題)

E :ヤング率
ν :ポアソン比

$\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon}$

平衡方程式

- 微小領域における釣り合い



$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & \partial / \partial y \\ 0 & \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \ddot{u}_x \\ \rho \ddot{u}_y \end{Bmatrix}$$

$\nabla^{*T} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$

境界条件

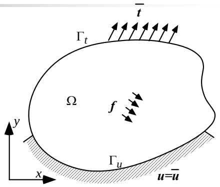
- 変位の境界条件

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}$$

- 荷重の境界条件

$$N_x \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{t}}$$

$$N_x = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

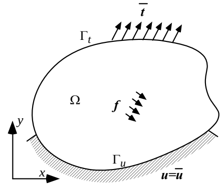


基礎方程式

$$\nabla^{*T}(D\nabla^{*}\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} = \boxed{\rho\ddot{\boldsymbol{u}}}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

$$N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad on \quad \Gamma_t$$



偏微分方程式の境界値問題
変位表記
　状態変数　変位
　外力、境界条件は時間の
関数であり得る
材料定数は？

弱形式

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T \left(\nabla^{*T}\left(D\nabla^{*}\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{f}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \left(\left(N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{t}}\right)\right) d\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T \left(\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\right) d\Omega \qquad \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

⇩

$$\int_{\Omega} \left(\left(\nabla^{*}\delta\boldsymbol{u}\right)^T D\nabla^{*}\boldsymbol{u}\right) d\Omega + \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T \left(\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\right) d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T f \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Gamma \qquad \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad on \quad \Gamma_u$$

有限要素離散の弱形式

- 変位　$\boldsymbol{u} = N\boldsymbol{u}_i$
- 仮想変位　$\delta\boldsymbol{u} = N\delta\boldsymbol{u}_i$
- 加速度　$\ddot{\boldsymbol{u}} = N\ddot{\boldsymbol{u}}_i$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\left(B\delta\boldsymbol{u}_i\right)^T DB\boldsymbol{u}_i\right) d\Omega = \delta\boldsymbol{u}^T K\boldsymbol{u}$$

$$\sum_i \left[\int_{\Omega_i} \left(N\delta\boldsymbol{u}_i\right)^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \left(N\delta\boldsymbol{u}_i\right)^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma\right] = \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{f}}$$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \rho N\ddot{\boldsymbol{u}}_i\right) d\Omega = \sum_i \delta\boldsymbol{u}_i^T \int_{\Omega_i} \left(N^T \rho N\right) d\Omega \, \ddot{\boldsymbol{u}}_i$$

$$= \sum_i \delta\boldsymbol{u}_i^T M_i \, \ddot{\boldsymbol{u}}_i = \delta\boldsymbol{u}^T M \, \ddot{\boldsymbol{u}}$$

M: 質量マトリクス

基礎方程式

- 減衰なし

$$K\boldsymbol{u}+M\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{f}$$

- 減衰を考慮

$$K\boldsymbol{u}+C\dot{\boldsymbol{u}}+M\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{f}$$

- 固有振動解析

$$K\boldsymbol{u}=\omega^2 M\boldsymbol{u}$$

固有値問題

- 通常の固有値問題

$$K\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$$

- 一般化固有値問題

$$K\boldsymbol{u}=\lambda M\boldsymbol{u}$$

- Mが正値対称であれば

$$M=LL^T$$
$$L^{-1}K\boldsymbol{u}=\lambda L^T\boldsymbol{u}$$
$$L^{-1}KL^{-T}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$$

特徴

- KとMは正値対称
- 固有振動数は実数
- 固有モードは互いに直交
  - 板書で

課題

- 前回の問題に対し、質量マトリクスをもとめよ
  - ただし、三角形内の積分は三角形の重心での値に三角形の面積をかけたもので近似できるとしてもよい
- Matlab、Octave等を用い、固有振動数、固有モードを求めよ
  - コマンド(eig)
- 固有モードが直交することを確認せよ