# シミュレーション工学
# （後半）

東京大学
人工物工学研究センター
鈴木克幸



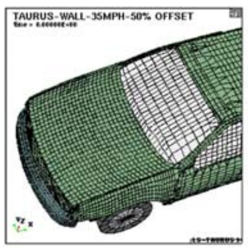
## CAE（ Computer Aided Engineering ）

- Dr. Jason Lemon (SDRC, 1980)
  - 設計者が解析ツールを使いこなすことにより、設計の評価、設計の質の向上を図る
  - Engineeringの本質の、計算機による支援（CAD、CAMなどより広い名前）
    - 様々な汎用ソフトの登場
    - 工業製品の設計に不可欠のツール
      - 構造解析
      - 流体解析
      - 運動解析
      - 最適設計



## 製品設計におけるCAE

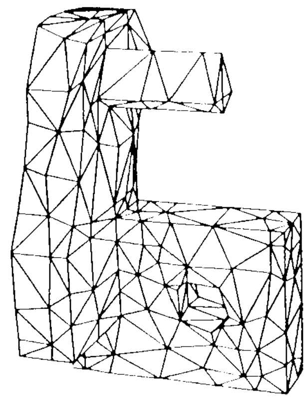
- 自動車
  - 衝突
  - 振動、騒音
  - 操縦安定性
  - 空気抵抗





## 有限要素法（Finite Element Method, FEM）

- 連続体の離散化解法
  - 無限自由度から有限自由度へ
  - 構造解析
    - 線形、固有振動、大変形、塑性、
  - 流体解析
    - 空気、水、粘性流、
  - 電磁気
  - 熱物質



# 線形と非線形

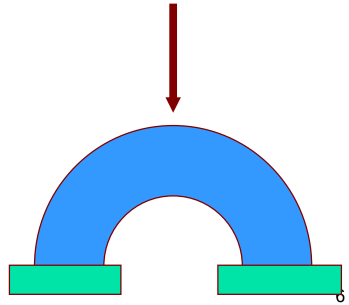
- 現実は非線形
- 実用上は線形でOKなことがほとんど
  - 微少変形，固有振動
  - CAEとして製品開発に使われている解析の90%は線形解析
- 非線形でなければ表現できない現象
  - 座屈，破壊，接触、大回転



# 構造力学の基本的な考え方

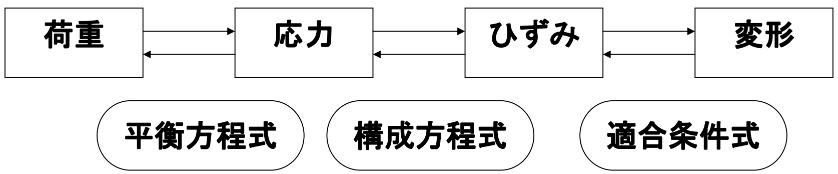
- 荷重
  - 応力
  - ひずみ
- 変形

⟺ ■強度





# 固体力学の基礎式



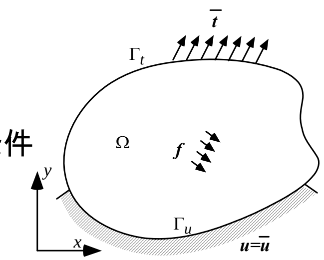



# 固体力学の基礎方程式

- 変位-ひずみの関係
  - 適合条件式
- ひずみ-応力の関係
  - 構成方程式
- 応力-外力の関係
  - 平衡方程式
- 境界条件
  - 変位境界条件
  - 荷重境界条件

場の方程式

境界条件

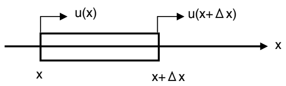



偏微分方程式の境界値問題

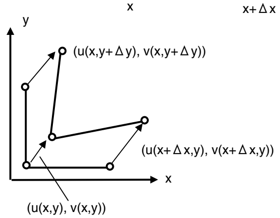
# ひずみ

- 一軸

$$\varepsilon = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{u(x) + \frac{du}{dx}\Delta x - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$




- 多軸
  - 直ひずみ
  - 剪断ひずみ



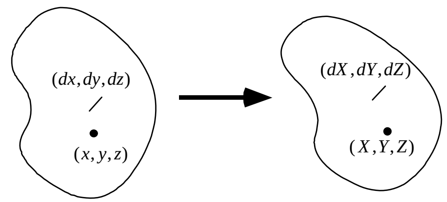



# 変位

- 変形前、変形後の座標により変位を表現

$$\begin{cases} u = X - x \\ v = Y - y \\ w = Z - z \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i dx_i \qquad dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX_i dX_i$$






# 変位とひずみ1

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)dz = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

$$\begin{aligned} dS^2 - ds^2 &= \left\{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dx^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dy^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\right\}^2 - dz^2 \end{aligned}$$



# 変位とひずみ2

$$\begin{aligned} &= \left\{2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}dx^2 \\ &+ \left\{2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dy^2 \\ &+ \left\{2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}dz^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dxdy \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}dydz \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}dzdx \end{aligned}$$

## ひずみ（Greenのひずみ）

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

直ひずみ

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

剪断
ひずみ

テンソル表記 $$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right]$$



## 線形ひずみ

- 2次の項を無視

直ひずみ

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$$

剪断
ひずみ

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

テンソル表記

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

工学剪断
ひずみ

$$\gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{yz}=2\varepsilon_{yz}=\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_{zx}=2\varepsilon_{zx}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$



## 2次元の適合条件式（変位-ひずみ）

- 変位 $\{u, v\}$
- ひずみ $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$

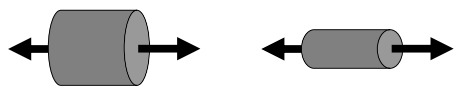
$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u/\partial x\\ \partial v/\partial y\\ \partial u/\partial y+\partial v/\partial x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

ベクトル表記 $\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla^{*}\boldsymbol{u}$



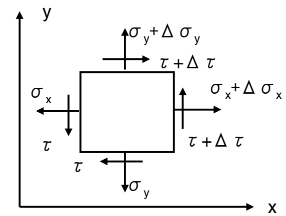
## 応力

- 一軸



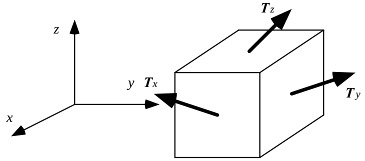
$$\sigma_x=\frac{F}{A}$$

- 多軸
  - 直応力
    $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
  - 剪断応力
    $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$



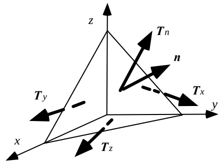
## 3次元応力

$$\boldsymbol{T}_x = \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\}$$
$$\boldsymbol{T}_y = \{\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}\}$$
$$\boldsymbol{T}_z = \{\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}\}$$




$$T_{nx}dS = \sigma_{xx}n_x dS + \sigma_{yx}n_y dS + \sigma_{zx}n_z dS$$
$$T_{ny}dS = \sigma_{xy}n_x dS + \sigma_{yy}n_y dS + \sigma_{zy}n_z dS$$
$$T_{nz}dS = \sigma_{xz}n_x dS + \sigma_{yz}n_y dS + \sigma_{zz}n_z dS$$

$$\mathbf{T}_n = \begin{Bmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$




テンソル表記

$$T_{ni} = \sigma_{ji} n_j$$



## 3次元主応力

- 剪断応力なし
  - 面の法線方向に力がかかる

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

- 固有値問題
  - 固有値(3成分)＝主応力値
  - 固有ベクトル(互いに直交)＝主応力方向

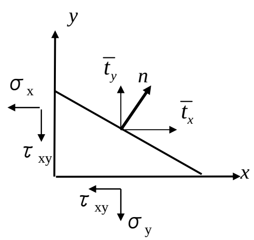


## 境界反力と応力(2次元)

$$\begin{cases} n_x\sigma_{xx} + n_y\tau_{xy} = \bar{t}_x \\ n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_{yy} = \bar{t}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_x\sigma_{xx} + n_y\tau_{xy} = \bar{t}_x \\ n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_{yy} = \bar{t}_y \end{cases}$$

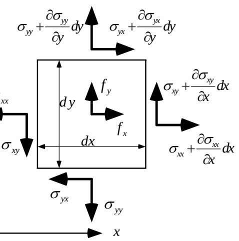
$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix}$$






## 応力と体積力の釣り合い(2次元)

- 微小領域における釣り合い




$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx - \sigma_{xx}\right)dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}dy - \tau_{xy}\right)dx + f_x dxdy = 0$$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx - \tau_{xy}\right)dy + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}dy - \sigma_{yy}\right)dx + f_y dxdy = 0$$

## 平衡方程式（2次元）

- 微小領域における釣り合い

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ベクトル表記 $\nabla^{*T}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$



## 応力と歪みの関係（構成方程式）

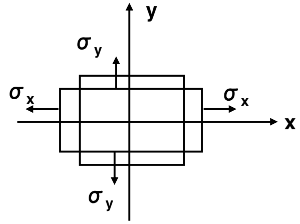
- 一軸 $\sigma = E\varepsilon$

- 多軸（等方性）

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$




$E$ :ヤング率
ν:ポアソン比
$G$:剪断剛性



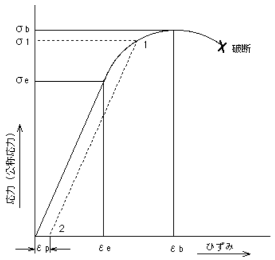
## ひずみ-応力関係式

- Hookeの法則

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ベクトル表記 $\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon}$




等方弾性
（平面応力問題 ）

$E$ :ヤング率
$\nu$ :ポアソン比



## 3次元の線形弾性関係

- 異方性

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

- 直交異方性（性質がxy面、yz面、xz面に対して対称）

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}$$

# 等方性(3次元)

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\sigma_{xy}\\\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\\\varepsilon_{xy}\\\varepsilon_{xz}\\\varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}$$

- $\lambda$ , $\mu$ :ラーメの定数

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\\\varepsilon_{xy}\\\varepsilon_{xz}\\\varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\sigma_{xy}\\\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\end{Bmatrix}$$

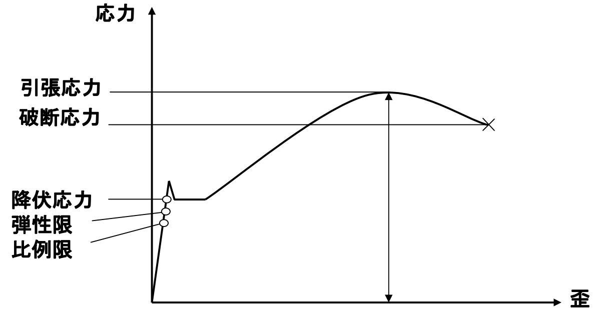
- テンソル表記

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\sigma_{ij}-\nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right\}$$



# 一般の鋼材




アルミ材などでは、降伏点が 明確に現れない
0.2%耐力



# 境界条件(2次元)

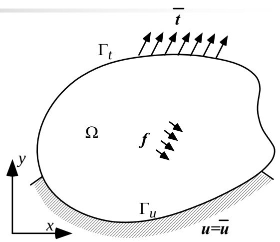
- 変位の境界条件

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$$

- 荷重の境界条件

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{t}_x\\ \bar{t}_y\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}n_x & 0 & n_y\\ 0 & n_y & n_x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{t}_x\\ \bar{t}_y\end{Bmatrix}$$




ベクトル表記 $N_x\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{t}}$

$$N_x=\begin{bmatrix}n_x & 0 & n_y\\ 0 & n_y & n_x\end{bmatrix}$$



# 基礎方程式

- 適合条件式 $\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla^*\boldsymbol{u}$
- 構成方程式 $\boldsymbol{\sigma}=D\boldsymbol{\varepsilon}$
- 平衡方程式 $\nabla^{*T}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$

} 領域内

- 変位の境界条件 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$
- 荷重の境界条件 $N_x\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{t}}$

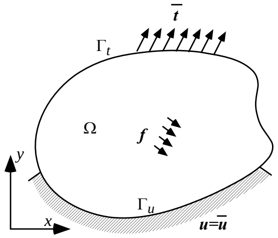
} 境界上

# 変位による基礎方程式

$$\nabla^{*T}(D\nabla^{*}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}\quad on\quad \Omega$$

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\quad on\quad \Gamma_u$$

$$N_x D\nabla^{*}\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{t}}\quad on\quad \Gamma_t$$

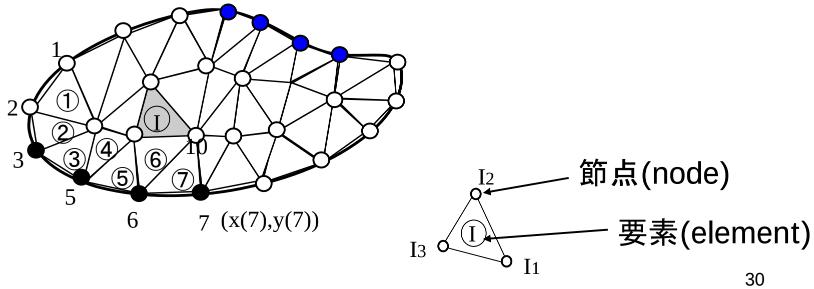



偏微分方程式の境界値問題
変位表記
　状態変数　変位
　自己随伴
解析解を求めるのは困難
　→数値解



# 有限要素離散

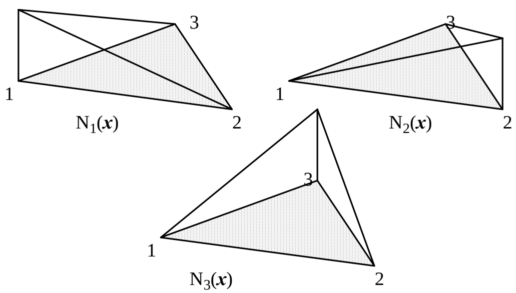
- 解析領域を、単位領域（要素）に分割（メッシュ分割）
  - 三角形、四辺形






# 形状関数

- 要素内のある節点で1となり、他の節点で0となる関数
- 三角形要素では1次関数



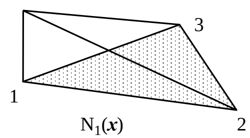



# 形状関数の導出

$$u(x,y)=\sum_i N_i(x,y)d_i$$

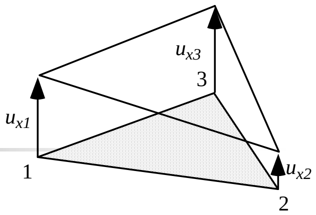
$$N_1(x,y)=c_0+c_1x+c_2y$$

$$N_1(x,y)=\begin{cases}1 & \text{at}\quad \text{node1}\\ 0 & \text{at}\quad \text{other nodes}\end{cases}$$




$$\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

# 変位の近似




- 形状関数と節点での値

$$\tilde{u}(x,y)=u_1N_1(x,y)+u_2N_2(x,y)+u_3N_3(x,y)$$
$$\tilde{v}(x,y)=v_1N_1(x,y)+v_2N_2(x,y)+v_3N_3(x,y)$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i=\begin{Bmatrix}\tilde{u}_i\\ \tilde{v}_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i=N\boldsymbol{u}_i$$



# ひずみ、応力の近似

- 変位を微分
- 三角形要素では要素内で一定値

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i=\nabla^*\tilde{\boldsymbol{u}}_i=\nabla^*N\boldsymbol{u}_i\equiv B\boldsymbol{u}_i$$

$$B=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}\partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \partial N_3/\partial x & 0\\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & 0 & \partial N_3/\partial y\\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial y & \partial N_3/\partial x\end{array}\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i=D\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i=DB\boldsymbol{u}_i$$



# 弱形式とエネルギー原理

- 変分原理

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T\left(\nabla^{*T}\left(D\nabla^*\boldsymbol{u}\right)+\boldsymbol{f}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\left(\left(N_xD\nabla^*\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{t}}\right)\right)d\Gamma=0$$
$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\quad on\quad \Gamma_u$$

$$\int_\Omega\left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^TD\nabla^*\boldsymbol{u}-\delta\boldsymbol{u}^Tf\right)d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma=0$$
$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\quad on\quad \Gamma_u$$

仮想仕事の原理

仮想変位による内部エネルギーの増加分＝外力の仕事

$$\int_\Omega\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^TD\nabla^*\boldsymbol{u}d\Omega=\int_\Omega\delta\boldsymbol{u}^Tfd\Omega+\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma$$



# なぜ弱形式か

- 1次関数で近似するとひずみは要素間で不連続
- 2階微分は存在しない

$$\int_\Omega\left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^TD\nabla^*\boldsymbol{u}-\delta\boldsymbol{u}^Tf\right)d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma=0$$

要素ごとの積分

$$\sum_i\int_{\Omega_i}\left(\left(\nabla^*\delta\boldsymbol{u}\right)^TD\nabla^*\boldsymbol{u}-\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f}\right)d\Omega-\sum_i\int_{\Gamma_{ti}}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma=0$$

## 有限要素離散の弱形式

- 変位 $\boldsymbol{u} = N\boldsymbol{u}_i$
- ひずみ $\varepsilon = B\boldsymbol{u}_i$
- 仮想変位 $\delta\boldsymbol{u} = N\delta\boldsymbol{u}_i$
- 仮想ひずみ $\delta\varepsilon = B\delta\boldsymbol{u}_i$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left( (B\delta\boldsymbol{u}_i)^T DB\boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[ \int_{\Omega_i} (N\delta\boldsymbol{u}_i)^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} (N\delta\boldsymbol{u}_i)^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left( \delta\boldsymbol{u}_i^T B^T DB\boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[ \int_{\Omega_i} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$



## 要素剛性マトリクスと全体剛性マトリクス

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \left( \delta\boldsymbol{u}_i^T B^T DB\boldsymbol{u}_i \right) d\Omega = \sum_i \left[ \int_{\Omega_i} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} \delta\boldsymbol{u}_i^T N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$$

$$\delta\boldsymbol{u}^T K\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}$$

全体剛性マトリクス $K = \sum_i \int_{\Omega_i} \left( B^T DB \right) d\Omega$ 要素剛性マトリクス

全体荷重ベクトル $\boldsymbol{f} = \sum_i \left[ \int_{\Omega_i} N^T \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{ti}} N^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma \right]$ 要素荷重ベクトル

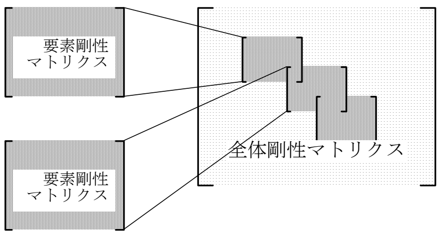
$$\boxed{K\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}}$$

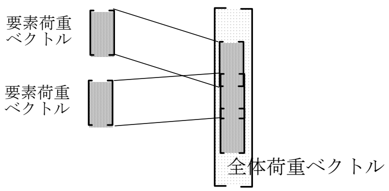
有限要素法の剛性方程式
→線形連立方程式ソルバー



## 剛性マトリクス、荷重ベクトルの足し合わせ

- 全体自由度の中の相当する位置に足し込む






## 課題1

- 課題：以下の問題を有限要素法を用いて解く．要素剛性マトリクス，全体剛性マトリクスを求めよ。